ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

შალვა ზვიადაძე

ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივების ზოგიერთი თვისების შესახებ

სადოქტორო დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი
თსუ ასოცირებული პროფესორი
ფიზ.-მათ. მეც. დოქტორი თეიმურაზ ახობაძე

თბილისი 2012

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

ფუნქციათა თეორიის ბევრი ძირითადი ცნება და შედეგი მიღებულ იქნა აპროქსიმაციის თეორიასთან დაკავშირებით. ამ თეორიის განვითარებამ წარმოაჩინა მისი მჭიდრო კავშირი ფუნქციათა თეორიისა და ფუნქციონალური ანალიზის ბევრ პრობლემასთან. აპროქსიმაციის თეორიის მნიშვნელოვანი მიმართულებაა ფუნქციათა მწკრივების თეორია. ფუნქციათა მწკრივების თეორიაში ერთ-ერთი ძირითადი პრობლემაა ფუნქციისათვის იმ მინიმალური პირობების დადგენა, რაც უზრუნველყოფს ამ ფუნქციის წარმოდგენას ფუნქციათა მწკრივით. ფუნქციათა მწკრივით ფუნქციის წარმოდგენა ნიშნავს მის კრებადობას ან რომელიმე მეთოდით შეჯამებადობას მოცემული ფუნქციიისკენ.

ფუნქციათა თეორიის, და კერძოდ, კლასიკური ჰარმონიული ანალიზის ამოცანებისადმი ინტერესი გაძლიერდა მას შემდეგ, რაც მათემატიკის გამოყენებებისათვის ფრიად აქტუალური საკითხების გადაჭრა კლასიკურ ჰარმონიულ ანალიზს დაეყრდნო.

ახლანდელ დროში ჯერადი ტრიგონომეტრიული და ორთოგონალური მწკრივების თეორია სწრაფად ვითარდება. ის გადმოცემულია მრავალ მონოგრაფიასა და ნაშრომში, რომელთა ჩამოთვლა შორს წაგვიყვანს.

ფ. ლუკაჩმა [1] დაამტკიცა, რომ ლებეგის აზრით ინტეგრებადი 2π-პერიოდული ფუნქციის ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამების მიმდევრობა ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილებში განშლადია ლოგარითმის რიგით.

რ. რიადმა [2] განიხილა ლუკაჩის თეორემის ანალოგი შეუღლებული უოლშის მწკრივებისათვის.

ფ. მორისმა ([3], [4]) განაზოგადა ლუკაჩის ეს დებულება აბელ – პუასონის საშულოებისათვის, კერძოდ, მან აჩვენა, რომ ლებეგის აზრით ინტეგრებადი, 2π-პერიოდული ფუნქციის ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივის აბელ – პუასონის საშუალოები ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილებში კვლავ განშლადია ლოგარითმის რიგით. აგრეთვე მან განიხილა შესაბამისი ანალოგი ფორმალურად გაწარმოებული აბელის საშუალოებისთვის.

მ. პინსკიმ [5] შეისწავლა ანლოგიური საკითხები ღერძზე ინტეგრებადი და არსებითად შემოსაზღვრული ფუნქციებისათვის; აგრეთვე, განიხილა აღნიშნული თეორემის ანალოგები გარკვეული ტიპის კენტი გულებისთვის.

ჩვენ ([6], [7]) მიერ განხილულ იქნა ლუკაჩის აღნიშნული თეორემის ანალოგი თ. ახობაძის ([7]-[10]) მიერ შემოღებული ჩეზაროს განზოგადებული (C,α_n)-საშუალოებისთვის და დადებითი რეგულარული მატრიცული შეჯამებადობისთვის. ნაჩვენები იქნა, რომ ლებეგის აზრით ინტეგრებადი, 2π-პერიოდული ფუნქციის ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივის (C,α_n) საშუალოებისთვის განშლადობის ლოგარითმული რიგი შენარჩუნებულია, ხოლო ამ ფუნქციის ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივის წრფივი საშუალოებისთვის შედეგი არსებითად დამოკიდებულია გასაშუალოების მატრიცზე.

პ. ჟოუმ და ს. ჟოუმ [11] დაამტკიცეს ლუკაჩის თეორემის ანალოგი ლოგარითმული რიგის მქონე კენტი გულებისთვის.

ი. დანშენგმა, პ. ჟოუმ და ს. ჟოუმ [12] განიხილეს ანალოგიური დებულებები მაღალი რიგის ფორმალური წარმოებულებისთვის და შეუღლებული პუასონის გულის ტიპის კენტი გულებისათვის.

რ. ტაბერსკიმ ([13], [14]) განიხილა ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციები, როლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\lim_{L\to+\infty}\frac{1}{L}\int_{L}^{L+C}\left|f(x)\right|dx=0\,,\quad \lim_{L\to+\infty}\frac{1}{L}\int_{-L-C}^{-L}\left|f(x)\right|dx=0\,.$$

მან განსაზღვრა ასეთი ფუნქციებისათვის ფურიეს კოეფიციენტები და შესაბამისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი. მანვე შეისწავლა ამ ფუნქციების ტრიგონომეტრიული, შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივებისა და მათი კერძო ჯამების $(C,1)$-საშუალოების ყოფაქცევის ზოგიერთი საკითხი.

ჩვენ [15] მიერ შესწავლილ იქნა ლუკაჩის აღნიშნული თეორემის ანალოგი ტაბერსკის მიერ განხილული ფუნქციებისა და მწკრივებისათვის; აგრეთვე, - ამ შედეგის ანალოგი ჩეზაროს განზოგადებული (C,α_n)-საშუალოსთვის და დადებითი რეგულარული მატრიცული შეჯამებადობისთვის.

ფ. მორისმა ([16], [17]) განაზოგადა ლუკაჩის აღნიშნული დებულება ორი ცვლადის ფუნქციებისათვის, კერძოდ, მან აჩვენა, რომ ლებეგის აზრით ინტეგრებადი, ცალ-ცალკე ცვლადების მიმართ 2π-პერიოდული ფუნქციის, ფურიეს შეუღლებული ორჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივი, გარკვეულ პირობებში კვლავ განშლადია ლოგარითმების ნამრავლის რიგით; მანვე განაზოგადა აღნიშნული დებულება აბელ-პუასონის საშუალოებისთვის და განიხილა შეუღლებული ორჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივის აპელ–პუასონის საშუალოს შეფასება ფუნქციის მეორე რიგის შერეული კერძოწარმოებულის სიგლუვის წერტილებში.

ი. დანშენგმა, პ. ჟოუმ და ს. ჟოუმ [18] განიხილეს მორისის დებულებების ანალოგები მაღალი რიგის შერეული კერძო წარმოებულებისთვის და შეუღლებული პუასონის გულის ტიპის კენტი გულებისათვის.

ჩვენ [19] მიერ განზოგადებული იქნა ფ. მორისის აღნიშნული შედეგი; აგრეთვე მიღებულია ამ შედეგის ანალოგი ჩეზაროს განზოგადებული (C,α_n,β_n)-საშუალოსთვის და დადებითი რეგულარული მატრიცული შეჯამებადობისთვის.

ფ. მორისმა და ვ. ვეიდმა [20] განიხილეს აღნიშნული თეორემის ანალოგი ორჯერადი ფურიე – უოლშის მწკრივებისათვის.

თავი I

ერთი ცვლადის ფუნქციების ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივები

1.1. აუცილებელი აღნიშვნები, განსაზღვრებები და ძირითადი თეორემები ერთი ცვლადის პერიოდული ფუნქციებისათვის

ვთქვათ f არის 2π პერიოდული, ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია და პერიოდზე ლებეგის აზრით ინტეგრებადი. ამ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

(1.1) $$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

სადაც

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx \quad \text{და} \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx,$$

არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები. (1.1) მწკრივის შეუღლებული მწკრივი ასე მოიცემა:

(1.2) $$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin kx-b_k\cos kx).$$

$S_n(f;x)$-ით აღვნიშნოთ (1.2) მწკრივის n-ური კერძო ჯამი.

ლუკაჩმა დაამტკიცა შემდეგი თეორემა.

თეორემა A. თუ $f\in L[-\pi;\pi]$ და რაიმე x წერტილში არსებობს სასრული ზღვარი

(1.3) $$d_x(f)\equiv\lim_{t\to 0+}[f(x+t)-f(x-t)],$$

მაშინ

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\tilde{S}_n(f;x)}{\ln n}=-\frac{d_x(f)}{\pi}.$$

ვთქვათ α_n არის რაიმე მიმდევრობა $[0;b]$ ინტერვალიდან, სადაც b არის სასრული რიცხვი. შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივის (1.2) კერძო ჯამის ჩეზაროს განზოგადებულ საშუალოს ექნება შემდეგი სახე:

(1.4) $$t_n^{\alpha_n}(f;x)\equiv\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}\tilde{S}_k(f;x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\tau_n^{\alpha_n}(t)dt,$$

სადაც

$$\tau_n^{\alpha_n}(t) \equiv \frac{1}{A_n^{\alpha_n}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n - 1} \tilde{D}_k(t)$$

და

(1.5)
$$A_n^{\alpha_n} \equiv \frac{(1+\alpha_n)(2+\alpha_n)\cdot \ldots \cdot (n+\alpha_n)}{n!}.$$

თუ (α_n) არის მუდმივი მიმდევრობა, ანუ $\alpha_n = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, მაშინ ეს საშუალო დაემთხვევა ჩეზაროს (C,α) საშუალოს.

დავუშვათ

$$\varphi(x,t) = f(x+t) - f(x-t) - d_x(f),$$

სადაც $d_x(f)$ რაიმე რიცხვია დამოკიდებული ფუნქციაზე და წერტილზე.

სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 1.1.1. ვთქვათ $f \in L[-\pi;\pi]$ და რაიმე x წერტილისთვის მოიძებნება ისეთი $d_x(f)$ რიცხვი, რომ სრულდება ტოლობა:

(1.6)
$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(x,t)| dt = 0.$$

მაშინ

(1.7)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n^{\alpha_n}(f;x)}{\ln n} = -\frac{d_x(f)}{\pi}.$$

დაისვა საკითხი: არსებობს, თუ არა ამ დებულების ანალოგი უფრო ზოგადი წრფივი საშუალოებისათვის.

ვთქვათ $q(n)$ არის მიმდევრობა, რომელის მნიშვნელობები ნატურალური რიცხვებია, ამასთან $2 \le q(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ და $\lim\limits_{n\to+\infty} q(n) = +\infty$. ავიღოთ გასაშუალოების მატრიცი (a_{nk}) ისე, რომ თუ $k > q(n)$, მაშინ $a_{nk} = 0$.

ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივის კერძო ჯამების წრფივ საშუალოს აღნიშნული მატრიცის მიმართ ექნება შემდეგი სახე:

$$\tilde{\sigma}_n(f;x) \equiv \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} \tilde{S}_k(f;x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} \tilde{D}_k(t) dt.$$

მატრიცს ეწოდება რეგულარული თუ სრულდება შემდეგი სამი პირობა

(I)
$$\lim_{n\to+\infty} a_{nk} = 0, \quad k \in \{1,2,\ldots\};$$

(II)
N_n-შემოსაზღვრულია, სადაც $N_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_{nk}|$;

(III)
$$\lim_{n\to+\infty} A_n = 1, \text{ სადაც } A_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{nk}.$$

ვთქვათ მოცემულია რაიმე s სასრული ზღვრისკენ კრებადი (s_k) მიმდევრობა, მაშინ (s_k) მიმდევრობის რეგულარული მატრიცის მიმართ σ_k საშუალოც კრებადია იგივე s ზღვრისკენ. აღსანიშნავია, რომ მოყვანილი სამი პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი (იხ. [21] თავი III თეორემა (1.2)).

სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 1.1.2. ვთქვათ $f \in L[-\pi;\pi]$, მაშინ ყოველ x წერტილში, რომელშიც სრულდება (1.6) გვაქვს:

ა) თუ $d_x(f) \neq 0$, მაშინ, ნებისმიერი დადებითი რეგულარული მატრიცისთვის

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{-\pi}{d_x(f)}\cdot\frac{\tilde{\sigma}_n(f;x)}{\ln q(n)}\right)\leq 1;$$

ბ) ნებისმიერი $\beta \in [0;1]$-თვის მოიძებნება ისეთი რეგულარული დადებითი მატრიცი, რომ

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\tilde{\sigma}_n(f;x)}{\ln q(n)} = -\frac{\beta\cdot d_x(f)}{\pi}.$$

1.2. აუცილებელი აღნიშვნები, განსაზღვრებები და ძირითადი თეორემები ერთი ცვლადის ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციებისათვის

ჩვენ ინტერესს წარმოადგენს განვიხილოთ აღნიშნული შედეგების ანალოგები რ. ტაბერსკის მიერ განხილული მწკრივებისთვის; აგრეთვე ამ შედეგების ანალოგი აბელის საშუალოსათვის, რომელიც პერიოდული ფუნქციებისათვის მოცემული ჰქონდა ფ. მორისს (იხ. [3], [4]).

შემოვიღოთ აღნიშვნები: ვთქვათ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in E$. ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი დადებითი ფიქსირებული C-თვის, L-ის მიმართ სრულდება

$$\frac{1}{L}\int_{L}^{L+C}\left|f(x)\right|dx=O(1),\ \frac{1}{L}\int_{-L-C}^{-L}\left|f(x)\right|dx=O(1),\ L\to+\infty. \tag{1.8}$$

ცხადია, ნებისმიერი პერიოდული ფუნქცია აკმაყოფილებს უკანასკნელ შეფასებებს.

განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)e^{i\pi kx/L},$$

სადაც

$$\widehat{f}(k)\equiv\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(u)e^{-i\pi ku/L}du.$$

მოცემული მწკრივის შეუღლებული მწკრივის კერძო ჯამს ექნება სახე

$$\tilde{S}_n^L(f;x)\equiv\sum_{|k|\le n}(-i\operatorname{sig}k)\,\widehat{f}(k)e^{i\pi kx/L}=-\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\tilde{D}_n^L(t-x)dt, \tag{1.9}$$

სადაც

$$\tilde{D}_n^L(t)\equiv\sum_{k=1}^{n}\sin(\pi kt/L). \tag{1.10}$$

დავუშვათ $L(n)\equiv L_n$ ნამდვილ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობაა, რომ $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n=+\infty$.

სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 1.2.1. (i) ვთქვათ $f\in E$, მაშინ ყოველ $x\in\mathbb{R}$ წერტილში, რომლისთვისაც სრულდება (1.6) და

$$\int_{1}^{L_n}\frac{\left|\varphi(x,t)\right|}{t}dt=o(\ln n),\ n\to\infty, \tag{1.11}$$

ადგილი ექნება ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{S}_n^{L_n}(f;x)}{\ln n}=-\frac{d_x(f)}{\pi}. \tag{1.12}$$

(ii) არსებობს L_n მიმდევრობა და პერიოდული f ფუნქცია, ისეთი, რომ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\int_{1}^{L_n}\frac{\left|\varphi(x,t)\right|}{t}dt=O(\ln n), \tag{1.13}$$

მაგრამ არ სრულდება (1.12).

ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, დაისვა საკითხი თეორემა 1.2.1-ის ანალოგის არსებობის შესახებ ჩეზაროს განზოგადებული საშუალოებისთვის და დადებითი რეგულარული წრფივი საშუალოებისათვის.

(1.9) კერძო ჯამების ჩეზაროს განზოგადებულ საშუალოს ექნება სახე

$$t_{n,\alpha_n}^{L}(f;x)\equiv\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}\tilde{S}_k^{L}(f;x)=$$

$$=-\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\tau_{n,\alpha_n}^{L}(t-x)dt\ ,$$

სადაც

$$\tau_{n,\alpha_n}^{L}(f;x)=\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}\tilde{D}_k^{L}(t)\,,$$

ხოლო $\alpha_n\in[0;b]$ ყოველი n-თვის, b სასრული რიცხვია და $A_n^{\alpha_n}$ გასაზღვრულია (1.5)-ით.

სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 1.2.2. (i) ვთქვათ $f\in E$, მაშინ ყოველ $x\in\mathbb{R}$ წერტილში, რომელშიც სრულდება (1.6) და (1.11) გვაქვს

(1.14) $$\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n,\alpha_n}^{L_n}(f;x)}{\ln n}=-\frac{d_x(f)}{\pi}\,.$$

(ii) არსებობს L_n მიმდევრობა და პერიოდული f ფუნქცია, რომ სრულდება (1.13), მაგრამ არ არსებობს α_n მიმდევრობა, რომლისთვისაც შესრულდება (1.14).

თეორემა 1.2.1-ის ანალოგი მატრიცული საშუალოებისათვის ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად. ვთქვათ $q(n)$ ნატურალურ რიცხვთა არაკლებადი მიმდევრობა, ამასთან $2\le q(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ და $\lim_{n\to+\infty}q(n)=+\infty$. ავიღოთ გასაშუალოების მატრიცი (a_{nk}) ისე, რომ თუ $k>q(n)$, მაშინ $a_{nk}=0$.

(1.9) კერძო ჯამების წრფივ საშუალოს აღნიშნული მატრიცის მიმართ აქვს სახე

$$\tilde{\sigma}_n^{L}(f;x)\equiv\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{S}_k^{L}(f;x)=-\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k^{L}(t-x)dt\,.$$

სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 1.2.3. (i) ვთქვათ $f\in E$, მაშინ ყოველ $x\in\mathbb{R}$ წერტილში, რომელშიც სრულდება (1.6) და

(1.15) $$\int_{1}^{L_n}\frac{|\varphi(x,t)|}{t}dt=o(\ln q(n))\,,$$

ადგილი აქვს შემდეგს:

ა) თუ $d_x(f)\ne 0$, მაშინ ნებისმიერი დადებითი რეგულარული მატრიცისთვის გვაქვს

(1.16) $$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{-\pi}{d_x(f)}\frac{\tilde{\sigma}_n^{L_n}(f;x)}{\ln q(n)}\right)\le 1\,;$$

ბ) $\forall\beta\in[0;1]$-თვის მოიძებნება ისეთი დადებითი, რეგულარული მატრიცი, რომ

(1.17) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\tilde{\sigma}_n^{L_n}(f;x)}{\ln q(n)}=-\frac{\beta\cdot d_x(f)}{\pi}\,.$$

(ii) არსებობს L_n, $q(n)$ მიმდევრობები და პერიოდული f ფუნქცია ისეთი, რომ

(1.18) $$\int_1^{L_n} \frac{|\varphi(x,t)|}{t} dt = O(\ln q(n)) .$$

მაგრამ როგორიც არ უნდა იყოს $\beta \in [0;1]$ და მისიშესაბამისი დადებითი, რეგულარული მატრიცი არ შერსულდება (1.17).

ბუნებრივია დაისვა საკითხი თეორემა 1.2.1.-ის ანალოგის არსებობის შესახებ აბელ-პუასონის საშუალოებისათვის. შემოვიღოთ აღნიშვნები.

ტაბერსკის მიერ განხილული შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივების აბელ-პუსონის საშუალოს ექნება სახე:

(1.19) $$\tilde{f}^{L}(r,x) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-i\operatorname{sig} k)\,\widehat{f}(k) e^{i\pi kx/L} r^{|k|} = -\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) Q_L(r,t-x)dt ,$$

სადაც

(1.20) $$Q_L(r,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} r^k \sin(\pi kt/L) .$$

ვთქვათ მოცემულია ფუნქცია $L:[0;1) \to \mathbb{R}$ ისეთი, რომ

(1.21) $$\lim_{r\to 1-} L(r) = +\infty .$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1.2.4. (i) ვთქვათ $f \in E$, მაშინ ყოველ $x \in \mathbb{R}$ წერტილში სრულდება (1.6) და

(1.22) $$\int_1^{L(r)} \frac{|\varphi(x,t)|}{t} dt = o(\ln(1-r)) , \quad r \to 1- .$$

ადგილი აქვს ტოლობას

(1.23) $$\lim_{r\to 1-} \frac{\tilde{f}^{L(r)}(r,x)}{\ln(1-r)} = \frac{d_x(f)}{\pi} .$$

(ii) არსებობს პერიოდული f ფუნქცია და ფუნქცია L ისეთი, რომ

(1.24) $$\int_1^{L(r)} \frac{|\varphi(x,t)|}{t} dt = O(\ln(1-r)) , \quad r \to 1- ,$$

მაგრამ არ სრულდება (1.23).

1.3. პერიოდული ფუნქციების ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომე-ტრიული მწკრივების ყოფაქცევის შესახებ ძირითადი თეორემების დამტკიცება

თეორემა 1.1.1-ის დამტკიცება

განვიხილოთ $t_n^{\alpha_n}(f;x)$. ვინაიდან $\tau_n^{\alpha_n}(t)$ და $f(x+t)-f(x-t)$ t-ს მიმართ კენტი ფუნქციებია, ინტეგრალის ადიციურობიდან გვექნება:

$$t_n^{\alpha_n}(f;x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\tau_n^{\alpha_n}(t)dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)-f(x-t)-d_x(f)\right]\tau_n^{\alpha_n}(t)dt-$$

$$-\frac{d_x(f)}{\pi}\int_0^{\pi}\tau_n^{\alpha_n}(t)dt=A_1(n)+A_2(n).$$

განვიხილოთ $A_1(n)$, (1.6)-ის ძალით, ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი დადებითი $\delta=\delta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ

$$\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}|\varphi(x,t)|\,du<\varepsilon .$$

ავიღოთ n იმდენად დიდი რომ $1/n<\delta$,

$$A_1(n)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x,t)\tau_n^{\alpha_n}(t)dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{1/n}\varphi(x,t)\tau_n^{\alpha_n}(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\varphi(x,t)\tau_n^{\alpha_n}(t)dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\varphi(x,t)\tau_n^{\alpha_n}(t)dt=-B_1-B_2-B_3.$$

(1.5) განსაზღვრებიდან ადვილი დასანახია, რომ $A_k^{\alpha_n-1}$ რიცხვები დადებითია, როცა $0\le\alpha_n$, ამასთან თუ გავითვალისწინებთ ფაქტს, რომ $\left|\tilde{D}_k(t)\right|\le k$ (იხ. [21], (5.11)), გვექნება

$$|B_1|\le\frac{1}{\pi}\int_0^{1/n}|\varphi(x,t)|\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}|\tilde{D}_k(t)|dt<$$

$$<\frac{n}{\pi}\int_0^{1/n}|\varphi(x,t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{\pi}.$$

(იხ. [21], (5.11)), $\left|\tilde{D}_k(t)\right|\le 2/t$. ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება:

$$|B_2|\le\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}|\varphi(x,t)|\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}|\tilde{D}_k(t)|dt\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\left|\varphi(x,t)\right|\frac{1}{t}dt=\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{t}d\int_0^t\left|\varphi(x,u)\right|du=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{t}\int_0^t\left|\varphi(x,u)\right|du\Bigg|_{1/n}^{\delta}+\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{t^2}\int_0^t\left|\varphi(x,u)\right|du\le$$

$$=\frac{2}{\delta}\int_0^{\delta}\left|\varphi(x,u)\right|du+\frac{2n}{\pi}\int_0^{1/n}\left|\varphi(x,u)\right|du+$$

$$+\varepsilon 2\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{t}dt\le 2\varepsilon\ln n\,,$$

ამასთან f-ის ინტეგრებადობიდან მივიღებთ

$$|B_3|\le\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\varphi(x,t)|\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}|\tilde{D}_k(t)|dt\le$$

$$\le 2\int_{\delta}^{\pi}\left|\varphi(x,t)\right|\frac{1}{t}dt\le\frac{2}{\delta}\int_{\delta}^{\pi}\left|\varphi(x,t)\right|dt\le$$

$$\le\frac{2}{\delta}\int_0^{\pi}\left|\varphi(x,t)\right|dt=O(1)\,,$$

ამრიგად,

(1.25)
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_1(n)}{\ln n}=0\,.$$

შევაფასოთ $A_2(n)$. α_n მიმდევრობა დავყოთ ორ ქვემიმდევრობად შემდეგნაირად: $\alpha_{m_i}\in[0;1)$ და $\alpha_{k_i}\in[1;b]$, $\forall i\in\mathbb{N}$. $\{m_1,m_2,...\}\cup\{k_1,k_2,...\}=\mathbb{N}$, $\{m_1,m_2,...\}\cap\{k_1,k_2,...\}=\varnothing$.

ჯერ განვიხილოთ α_{m_i} ქვემიმდევრობა:

$$\int_0^{\pi}\tau_i^{\alpha_{m_i}}(t)dt=\int_0^{\pi}\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}\tilde{D}_k(t)dt=$$

$$=\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}\int_0^{\pi}\tilde{D}_k(t)dt=\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k\,.$$

გვაქვს

$$\int_0^{\pi}\tilde{D}_n(t)dt=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\pi}\sin itdt=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{-\cos it}{i}\bigg|_0^{\pi}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-\cos i\pi}{i}+\frac{\cos 0}{i}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{i}=2\left(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2s+1}\right),$$

სადაც $s=[(n-1)/2]$. ცხადია,

$$2\left(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2s+1}\right)=$$

$$=2\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2s+1}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{s}\right)\right]\simeq$$

$$\simeq 2\left(\ln s-\frac{1}{2}\ln s\right)=\ln s\,.$$

ადვილი დასანახია, რომ $\ln s\simeq\ln n$, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ არსებობს ისეთი $N=N(\varepsilon)$, რომ ყოველი $k\ge N$, გვაქვს

(1.26)
$$1-\varepsilon<\frac{U_k}{\ln k}<1+\varepsilon\,.$$

განვიხილოთ

$$\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k=\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k+$$

$$+\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=[i/M]+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k=D_1+D_2\,.$$

უკანასკნელი გამოსახულება შევაფასოთ ქვემოდან. (1.26)-ის ძალით გვაქვს

$$D_2=\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=[i/M]+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k>$$

$$>\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=[i/M]+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}(1-\varepsilon)\ln k>$$

$$>\frac{(1-\varepsilon)(\ln i-\ln M)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=[i/M]+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}=$$

$$=\frac{(1-\varepsilon)(\ln i-\ln M)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\left(\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}-\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}\right)=$$

$$=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)-(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}=$$

$$=E_1-E_2\,.$$

თუ $0<\alpha_{m_i}<1$, მაშინ $-1<\alpha_{m_i}-1<0$. აქედან გამომდინარეობს $A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}$-ს კლებადობა. ამგვარად, გვექნება

$$E_2=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}\le$$

$$\le(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-[i/M]}^{\alpha_{m_i}-1}\,.$$

თუ $M=M(\varepsilon)$-ს იმდენად დიდს ავიღებთ, რომ $1/M<\varepsilon$ და $A_i^{\alpha_{m_i}}$ რიცხვების შეფასებებს გავითვალისწინებთ (იხ. [9] ლემა 2), მივიღებთ

$$(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-[i/M]}^{\alpha_{m_i}-1}=$$

$$=O\left(\frac{i^{-\alpha_{m_i}}\cdot\alpha_{m_i}}{\left(i-i/M\right)^{1-\alpha_{m_i}}}\cdot\frac{i}{M}\right)=O\left(\frac{i^{-\alpha_{m_i}}\cdot\alpha_{m_i}}{i^{1-\alpha_{m_i}}}\cdot\frac{i}{M}\right)=o(1)\,.$$

ანუ

$$E_1=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)$$

და

$$E_2=o(1)\,.$$

ამის გარდა, (1.26) ძალით და $A_i^{\alpha_{m_i}}$ მიმდევრობის კლებადობის გამო i-ს მიმართ სამართლიანია D_1-ის შემდეგი შეფასება:

$$D_1=\frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{N}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k+\frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=N+1}^{[i/M]}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k\ge$$

$$\geq \frac{C_1(N)}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} + \frac{1}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=N+1}^{[i/M]} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} (1-\varepsilon) \ln k \geq$$

$$\geq \frac{C_1(N)}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} + \frac{(1-\varepsilon) \ln N}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=N+1}^{[i/M]} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} \geq$$

$$\geq \frac{C_1(N)}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_i^{\alpha_{m_i}-1} + \frac{(1-\varepsilon) \ln N}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=N+1}^{[i/M]} A_i^{\alpha_{m_i}-1} =$$

$$= O\left(\frac{i^{-\alpha_{m_i}} \cdot \alpha_{m_i}}{i^{1-\alpha_{m_i}} \ln i} \right) + O\left(\frac{i^{-\alpha_{m_i}} \cdot \alpha_{m_i}}{i^{1-\alpha_{m_i}} \ln i} \cdot \left(\frac{i}{M} - N \right) \right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{i \ln i} \right) + O\left(\frac{(i-MN) \cdot i^{-\alpha_{m_i}} \cdot \alpha_{m_i}}{i^{1-\alpha_{m_i}} \cdot M \cdot \ln i} \right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{i \ln i} \right) + O\left(\frac{1}{\ln i} \right),$$

სადაც

$$C_1(N) = \min_{0 \leq k \leq i} |U_k| .$$

მაშასადამე,

$$\varliminf_{i \to +\infty} \frac{1}{\ln i} \int_0^{\pi} \tau_i^{\alpha_{m_i}}(t) dt = \varliminf_{i \to +\infty} (D_1 + D_2) \geq$$

$$\geq \lim_{i \to +\infty} (D_1 + E_1 - E_2) = \lim_{i \to +\infty} E_1 = 1 .$$

$A_2(n)$ წევრში მოცემული ინტეგრალი შევაფასოთ ზემოდან. (1.26)-ის ძალით გვაქვს

$$\frac{1}{\ln i} \int_0^{\pi} \tau_i^{\alpha_{m_i}}(t) dt = \frac{1}{\ln i} \int_0^{\pi} \frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{i} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} \tilde{D}_k(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{i} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} \int_0^{\pi} \tilde{D}_k(t) dt = \frac{1}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{i} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} U_k =$$

$$= \frac{1}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} U_k + \frac{1}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=N+1}^{i} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} U_k \leq$$

$$= \frac{1}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} U_k + \frac{1}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=N+1}^{i} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} (1+\varepsilon) \ln k \leq$$

$$\leq \frac{C_2(N)}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} + \frac{(1+\varepsilon) \ln i}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=N+1}^{i} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} .$$

$A_i^{\alpha_{m_i}}$ მიმდევრობის i-ს მიმართ კლებადობის გამო და $A_i^{\alpha_{m_i}}$ რიცხვების წარმოდგენიდან (იხ. [9] ლემა 2) მივიღებთ:

$$\frac{C_2(N)}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} + \frac{(1+\varepsilon) \ln i}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=N+1}^{i} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} \leq$$

$$\leq \frac{C_2(N)}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_{i-N}^{\alpha_{m_i}-1} + \frac{(1+\varepsilon)}{A_i^{\alpha_{m_i}}} \left(\sum_{k=0}^{i} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} - \sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} \right) \leq$$

$$\leq \frac{C_2(N)}{\ln i \cdot A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_{i-N}^{\alpha_{m_i}-1} + (1+\varepsilon) - \frac{(1+\varepsilon)}{A_i^{\alpha_{m_i}}} \sum_{k=0}^{N} A_i^{\alpha_{m_i}-1} =$$

$$=1+\varepsilon+O\left(\frac{(i-N)^{\alpha_{m_i}-1}\cdot\alpha_{m_i}}{i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\right)+O\left(\frac{i^{\alpha_{m_i}-1}\cdot\alpha_{m_i}}{i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\right)=$$

$$=1+\varepsilon+O\left(\left(1-\frac{N}{i}\right)^{\alpha_{m_i}}\frac{1}{(i-N)\ln i}\right)+O\left(\frac{1}{i\ln i}\right)$$

$$=1+\varepsilon+O\left(\frac{1}{i\ln i}\right),$$

სადაც

$$C_2(N)=\max_{0\le k\le N}\left|U_k\right|,$$

ე. ი.

$$\overline{\lim_{i\to+\infty}}\frac{1}{\ln i}\int_0^\pi \tau_i^{\alpha_{m_i}}(t)dt\le 1.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{1}{\ln i}\int_0^\pi \tau_i^{\alpha_{m_i}}(t)dt=1.$$

განვიხილოთ α_{k_i} ქვემიმდევრობა. გვაქვს

$$\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j=\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_i}}\sum_{j=0}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j+$$

$$+\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=[i/M]+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j=F_1+F_2.$$

თუ $1\le\alpha_{k_i}\le b$, $A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}$ კლებადია j-ს მიმართ, მაშინ (1.26) ძალით გვექნება:

$$F_2=\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=[i/M]+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j>$$

$$>\frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=[i/M]+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}(1-\varepsilon)\ln j>$$

$$>\frac{(1-\varepsilon)(\ln i-\ln M)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=[i/M]+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}=$$

$$=\frac{(1-\varepsilon)(\ln i-\ln M)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\left(\sum_{j=0}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}-\sum_{j=0}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\right)=$$

$$=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\left(1-\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\right)=G_1-G_2.$$

რადგან $A_i^{\alpha_{k_i}-1}$ ზრდადია როგორც i-ს ფუნქცია, ამიტომ

$$G_1=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right),$$

ხოლო

$$G_2=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\le$$

$$\le (1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]} A_i^{\alpha_{k_i}-1} =$$

$$= O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}\cdot\alpha_{k_i}}{i^{1-\alpha_{k_i}}}\cdot\frac{i}{M}\right) = o(1)\,.$$

(1.26)-ძალით და $A_i^{\alpha_{k_i}-1}$ ზრდადობიდან გვაქვს:

$$F_1 = \frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j + \frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=N+1}^{[i/M]} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j \ge$$

$$\ge \frac{C_1(N)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1} + \frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=N+1}^{[i/M]} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}(1-\varepsilon)\ln j \ge$$

$$\ge \frac{C_1(N)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1} + \frac{(1-\varepsilon)\ln N}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=N+1}^{[i/M]} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1} \ge$$

$$\ge \frac{C_1(N)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{k=0}^{N} A_{i-N}^{\alpha_{k_i}-1} + \frac{(1-\varepsilon)\ln N}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{k=N+1}^{[i/M]} A_{i-[i/M]}^{\alpha_{k_i}-1} =$$

$$= O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}\cdot\alpha_{k_i}}{\left(i-N\right)^{1-\alpha_{k_i}}\ln i}\right) + O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}\cdot\alpha_{k_i}}{\ln i\cdot\left(i-i/M\right)^{1-\alpha_{k_i}}}\cdot\left(\frac{i}{M}-N\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{i\ln i}\right) + O\left(\frac{(i-MN)\cdot\alpha_{k_i}}{i\cdot M^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{i\ln i}\right) + O\left(\frac{1}{\ln i}\right).$$

აქედან დავასკვნით, რომ

$$\varliminf_{i\to+\infty}\frac{1}{\ln i}\int_0^{\pi}\tau_i^{\alpha_{k_i}}(t)dt = \varliminf_{i\to+\infty}(F_1+F_2) \ge$$

$$\ge \lim_{i\to+\infty}(F_1+G_1-G_2) = \lim_{i\to+\infty}G_1 = 1\,.$$

ახლა შევაფასოთ იგივე გამოსახულება ზემოდან:

$$\frac{1}{\ln i}\int_0^{\pi}\tau_i^{\alpha_{k_i}}(t)dt = \frac{1}{\ln i}\int_0^{\pi}\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\tilde{D}_j(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\int_0^{\pi}\tilde{D}_j(t)dt = \frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{i} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j =$$

$$= \frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j + \frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=N+1}^{i} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j \le$$

$$\le \frac{C_2(N)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N} A_i^{\alpha_{k_i}-1} + \frac{1+\varepsilon}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=N+1}^{i} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\ln j \le$$

$$\le \frac{C_2(N)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{k=0}^{N} A_i^{\alpha_{k_i}-1} + \frac{(1+\varepsilon)\ln i}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\left(\sum_{j=0}^{i} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1} - \sum_{j=N+1}^{N} A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\right) =$$

$$= \frac{C_2(N)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N} A_i^{\alpha_{k_i}-1} + 1 + \varepsilon - \frac{(1+\varepsilon)}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N} A_{i-N}^{\alpha_{k_i}-1} =$$

$$=1+\varepsilon+O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}}{i^{1-\alpha_{k_i}}\ln i}\right)+O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}}{(i-N)^{1-\alpha_{k_i}}}\right)=$$

$$=1+\varepsilon+O\left(\frac{1}{i\ln i}\right)+O\left(\frac{1}{\ln i}\right);$$

ე. ი.

$$\overline{\lim_{i\to+\infty}}\frac{1}{\ln i}\int_0^{\pi}\tau_i^{\alpha_{k_i}}(t)dt\le 1,$$

ამგვარად,

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{1}{\ln i}\int_0^{\pi}\tau_i^{\alpha_{k_i}}(t)dt=1.$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_2(n)}{\ln n}=-\frac{d_x(f)}{\pi},$$

ბოლო ტოლობა (1.25)-შეფასებასთან ერთად ამტკიცებს თეორემა 1.1.1-ს.

თეორემა 1.1.2.-ის დამტკიცება

განვიხილოთ $\tilde{\sigma}_n(f;x)$, ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით და $\tilde{D}_k(t)$-კენტობიდან გვაქვს

$$\tilde{\sigma}_n(f;x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k(t)dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)-f(x-t))\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k(t)dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)-f(x-t)-d_x(f))\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k(t)dt-$$

$$-\frac{d_x(f)}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k(t)dt=A_1(n)+A_2(n).$$

ჯერ დავამტკიცოთ თეორემის ა) ნაწილი. (1.6)-ის ძალით, ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი დადებითი $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ რიცხვი, რომ

$$\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}|\varphi(x,t)|du<\varepsilon.$$

მაშინ ვინაიდან $\lim_{n\to+\infty}q(n)=+\infty$ ავიღოთ n იმდენად დიდი, რომ $1/q(n)<\delta$. გვაქვს

$$A_1(n)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x,t)\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k(t)dt\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_0^{1/q(n)}\left|\varphi(x,t)\right|\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\left|\tilde{D}_k(t)\right|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{1/q(n)}^{\delta}\left|\varphi(x,t)\right|\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\left|\tilde{D}_k(t)\right|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|\varphi(x,t)\right|\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\left|\tilde{D}_k(t)\right|dt = B_1+B_2+B_3 .$$

რადგან $\left|\tilde{D}_k(t)\right|\le k$ (იხ. [21], (5.11)), ამიტომ

$$B_1 \le A_n\frac{q(n)}{\pi}\int_0^{1/q(n)}\left|\varphi(x,t)\right|dt < \frac{\varepsilon\cdot A_n}{\pi},$$

სადაც $A_n=\sum_{k=1}^{+\infty}a_{nk}$ და $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=1$.

რადგან $\left|\tilde{D}_k(t)\right|\le 2/t$ (იხ. [21], (5.11)) ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება

$$B_2 \le \frac{2A_n}{\pi}\int_{1/q(n)}^{\delta}\left|\varphi(x,t)\right|\frac{1}{t}dt = \frac{2A_n}{\pi}\int_{1/q(n)}^{\delta}\frac{1}{t}d\int_0^t\left|\varphi(x,u)\right|du =$$

$$=\frac{2A_n}{\pi}\frac{1}{t}\int_0^t\left|\varphi(x,u)\right|du\Bigg|_{1/q(n)}^{\delta}+\frac{2A_n}{\pi}\int_{1/q(n)}^{\delta}\frac{1}{t^2}\int_0^t\left|\varphi(x,u)\right|du \le$$

$$=\frac{2A_n}{\delta}\int_0^{\delta}\left|\varphi(x,u)\right|du+\frac{2A_nq(n)}{\pi}\int_0^{1/q(n)}\left|\varphi(x,u)\right|du+$$

$$+\varepsilon 2A_n\int_{1/q(n)}^{\delta}\frac{1}{t}dt \le 2\varepsilon A_n\ln q(n),$$

ამასთან, ფუნქციის ინტეგრებადობიდან გამომდინარეობს

$$B_3 \le 2\cdot A_n\cdot\int_{\delta}^{\pi}\left|\varphi(x,t)\right|\frac{1}{t}dt \le$$

$$\le\frac{2\cdot A_n}{\delta}\int_{\delta}^{\pi}\left|\varphi(x,t)\right|dt \le \frac{2\cdot A_n}{\delta}\int_0^{\pi}\left|\varphi(x,t)\right|dt = O(1).$$

ამრიგად,

(1.27) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_1(n)}{\ln q(n)}=0 .$$

განვიხილოთ

$$A_2(n) = -\frac{d_x(f)}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k(t)dt =$$

$$=-\frac{d_x(f)}{\pi}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\int_0^{\pi}\tilde{D}_k(t)dt = -\frac{d_x(f)}{\pi}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}U_k .$$

შემდეგ (1.26)-ის ძალით გვექნება

$$\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}U_k = \sum_{k=0}^{N}a_{nk}U_k+\sum_{k=N+1}^{q(n)}a_{nk}U_k \le$$

$$\le C_2(N)\sum_{k=0}^{N}a_{nk}+(1+\varepsilon)\ln q(n)\sum_{k=N+1}^{q(n)}a_{nk} \le$$

$$\le C_2(N)A_n+(1+\varepsilon)A_n\ln q(n) .$$

მივიღებთ

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\frac{-\pi}{d_x(f)}\cdot\frac{A_2(n)}{\ln q(n)}\right)\le 1,$$

უკანასკნელი, (1.27) და $\tilde{\sigma}_n(f;x)$-ის წარმოდგენა ამტკიცებს თეორემა 1.1.2-ის ა) ნაწილს.

ბ) განვიხილოთ ნებისმიერი $\beta\in[0;1]$ და ავაგოთ $\beta(n)\to\beta$ მიმდევრობა ისე, რომ როცა $n\to+\infty$, მაშინ $q^{\beta(n)}(n)\to+\infty$. (a_{nk}) მატრიცი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$a_{nk}=\begin{cases}1, & \text{თუ } k=[q^{\beta(n)}(n)],\\ 0, & \text{თუ } k\neq[q^{\beta(n)}(n)].\end{cases}$$

ცხადია, (a_{nk}) რეგულარული მატრიცია.

ვინაიდან $q^{\beta(n)}(n)\to+\infty$, ამიტომ (1.26) ძალით გვაქვს

$$\frac{1}{\ln q(n)}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}U_k=\frac{U_{\left[q^{\beta(n)}(n)\right]}}{\ln q(n)}\le\frac{(1+\varepsilon)\cdot\ln\left[q^{\beta(n)}(n)\right]}{\ln q(n)}\le$$
$$\le\frac{(1+\varepsilon)\cdot\ln q^{\beta(n)}(n)}{\ln q(n)}\le(1+\varepsilon)\cdot\beta(n)\,,$$

ე. ი.

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{\ln q(n)}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k(t)dt\le\beta\,.$$

მეორე მხრივ,

$$\frac{1}{\ln q(n)}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}U_k=\frac{U_{\left[q^{\beta(n)}(n)\right]}}{\ln q(n)}\ge\frac{(1-\varepsilon)\cdot\ln\left[q^{\beta(n)}(n)\right]}{\ln q(n)}\ge$$
$$\ge\frac{(1-\varepsilon)\ln(q^{\beta(n)}(n)/2)}{\ln q(n)}=(1-\varepsilon)\cdot\beta(n)-\frac{(1-\varepsilon)\ln 2}{\ln q(n)}\,.$$

ვინაიდან $\lim\limits_{n\to+\infty}q(n)=+\infty$, ამიტომ

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{\ln q(n)}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k(t)dt\ge\beta\,;$$

ე. ი.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln q(n)}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k(t)dt=\beta\,.$$

საბოლოოდ უკანასკნელი და (1.27) შეფასებებიდან, $\tilde{\sigma}_{q(n)}(f;x)$-ის და $A_2(n)$-ის წარმოდგენიდან გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{\sigma}_{q(n)}(f;x)}{\ln q(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{A_1(n)+A_2(n)}{\ln q(n)}=-\frac{\beta\cdot d_x(f)}{\pi}\,.$$

თეორემა 1.1.2 დამტკიცებულია.

1.4. ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციების ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივების ყოფაქცევის შესახებ ძირითადი თეორემების დამტკიცება

თეორემა 1.2.1-ის დამტკიცება.

განვიხილოთ $\tilde{S}_n^{L_n}(f;x)$,

$$\tilde{S}_n^{L_n}(f;x) = -\frac{1}{L_n}\int_{-L_n}^{L_n} f(t)\tilde{D}_n^{L_n}(t-x)dt$$

ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით $u = t - x$ მივიღებთ

$$\tilde{S}_n^{L_n}(f;x) = -\frac{1}{L_n}\int_{-L_n-x}^{L_n-x} f(x+u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)du\,,$$

მეორეს მხრივ თუ ცვლადს შევცვლით $-u = t - x$ და გავითვალისწინებთ, რომ $\tilde{D}_k^L(t)$ კენტი ფუნქციაა t-ს მიმართ, მივიღებთ

$$\tilde{S}_n^{L_n}(f;x) = \frac{1}{L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n+x} f(x-u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)du\,,$$

საბოლოოდ ინტეგრალის ადიციურობის ძალით გვექნება

$$\tilde{S}_n^{L_n}(f;x) = -\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n-x}^{L_n-x} f(x+u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)du +$$

$$+\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n+x} f(x-u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)du =$$

$$= -\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n-x} (f(x+u)-f(x-u))\tilde{D}_n^{L_n}(u)du -$$

$$-\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n-x}^{-L_n+x} f(x+u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)du +$$

$$+\frac{1}{2L_n}\int_{L_n-x}^{L_n+x} f(x-u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)du = A_1 + A_2 + A_3\,. \tag{1.28}$$

განვიხილოთ A_1. ვინაიდან $f(x+u) - f(x-u)$ და $\tilde{D}_n^{L_n}(u)$ u-ს მიმართ კენტი ფუნქციებია, ამიტომ გვექნება

$$A_1 = -\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n-x} (f(x+u)-f(x-u))\tilde{D}_n^{L_n}(u)du =$$

$$= -\frac{1}{L_n}\int_{0}^{L_n-x} (f(x+u)-f(x-u))\tilde{D}_n^{L_n}(u)du =$$

$$= -\frac{1}{L_n}\int_{0}^{L_n} (f(x+u)-f(x-u))\tilde{D}_n^{L_n}(u)du +$$

$$+\frac{1}{L_n}\int_{L_n-x}^{L_n} (f(x+u)-f(x-u))\tilde{D}_n^{L_n}(u)du = B_1 + B_2\,. \tag{1.29}$$

განვიხილოთ $\tilde{D}_n^{L_n}(u)$. $\tilde{D}_n(u)$-ის წარმოდგენაში (იხ. [21], თავი II, (5.6)) ცვლადის შეცვლით მივიღებთ შეფასებას $\tilde{D}_n^{L_n}(u)$-თვის:

$$|\tilde{D}_n^{L_n}(u)|\le \frac{1}{\sin(\pi u/2L_n)}.$$

განვიხილოთ B_2. ადვილი დასანახია, რომ (1.8)-ში, ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით და ბოლოს მიღებული შეფასების ძალით დავადგენთ, რომ

$$B_2 \le \frac{1}{L_n}\int_{L_n-x}^{L_n} |f(x+u)-f(x-u)|\cdot|\tilde{D}_n^{L_n}(u)|\,du \le$$

$$\le \frac{1}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n} |f(x+u)-f(x-u)|\,du \le$$

$$\le \frac{1}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n} \left(|f(x+u)|+|f(x-u)|\right)du =$$

(1.30) $$= \frac{1}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\left(\int_{L_n}^{L_n+x} |f(t)|\,dt + \int_{-L_n+2x}^{-L_n+x} |f(t)|\,dt\right) = O(1).$$

განვიხილოთ A_2 და A_3. მაშინ B_2-ის მსგავსად, (1.8)-ისა და ინტეგრალში ცვლადის შეცვლის ძალით მივიღებთ შეფასებებს:

$$|A_2|\le \frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{-L_n-x}^{-L_n+x} |f(x+u)|\,du =$$

(1.31) $$= \frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{-L_n}^{-L_n+2x} |f(t)|\,dt = O(1),$$

და

$$|A_3|\le \frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n+x} |f(x-u)|\,du =$$

(1.32) $$= \frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{-L_n+2x}^{-L_n} |f(t)|\,dt = O(1).$$

განვიხილოთ B_1,

$$B_1 = -\frac{1}{L_n}\int_0^{L_n} (f(x+u)-f(x-u)-d_x(f))\tilde{D}_n^{L_n}(u)\,du -$$

$$-\frac{d_x(f)}{L_n}\int_0^{L_n} \tilde{D}_n^{L_n}(u)\,du = C_1 + C_2.$$

შევაფასოთ C_1. (1.6)-ის ძალით ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის, მოიძებნება დადებითი რიცხვი (საზოგადოდ დამოკიდებული ε-ზე) $\delta=\delta(\varepsilon)$ ისეთი, რომ

(1.33) $$\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} |\varphi(x,t)|\,du < \varepsilon.$$

ავიღოთ n იმდენად დიდი, რომ $1/n<\delta$, მაშინ მივიღებთ

$$C_1 = -\frac{1}{L_n}\int_0^{1/n} \varphi(x,u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)\,du - \frac{1}{L_n}\int_{1/n}^{\delta} \varphi(x,u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)\,du -$$

(1.34) $$-\frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{L_n} \varphi(x,u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)\,du = -D_1 - D_2 - D_3.$$

(1.10)-ის ძალით ადვილად დავასკვნით, რომ

(1.35) $$|\tilde{D}_n^{L_n}(u)|\le n.$$

ამიტომ ყოველი u-თვის. (1.33)-ის ძალით გვექნება

(1.36) $$|D_1|\le \frac{n}{L_n}\int_0^{1/n}|\varphi(x,u)|\,du<\frac{\varepsilon}{L_n}.$$

$\left|\tilde{D}_k(t)\right|\le 2/t$ (იხ. [21], (5.11)), ამიტომ (1.10)-ის გამო და ცვლადის შეცვლით, ადვილად დავასკვნით, რომ

(1.37) $$|\tilde{D}_n^{L_n}(u)|\le \frac{2L_n}{\pi u},\ \ 0<u\le L_n.$$

მაშასადამე ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას

$$|D_2|\le \frac{1}{L_n}\int_{1/n}^{\delta}|\varphi(x,u)|\frac{2L_n}{\pi u}du=\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{u}d\int_0^u|\varphi(x,t)|\,dt=\frac{2}{\pi}\frac{1}{u}\int_0^u|\varphi(x,t)|\,dt\Big|_{1/n}^{\delta}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(x,t)|\,dtdu=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}|\varphi(x,t)|\,dt-$$

$$-\frac{2n}{\pi}\int_0^{1/n}|\varphi(x,t)|\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(x,t)|\,dtdu\le$$

(1.38) $$\le\frac{2\varepsilon}{\pi}\left(2+\int_{1/n}^{\delta}\frac{du}{u}\right)=\frac{2\varepsilon}{\pi}(2+\ln\delta-\ln 1+\ln n))=o(\ln n).$$

ამასთან, (1.11) და (1.37)-ის ძალით გვექნება

$$|D_3|\le\frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{L_n}|\varphi(x,u)|\frac{2L_n}{\pi u}du=\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{L_n}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{1}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du+\frac{2}{\pi}\int_1^{L_n}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du\le\frac{2}{\pi\delta}\int_{\delta}^{1}|\varphi(x,u)|\,du+$$

(1.39) $$+\frac{2}{\pi}\int_1^{L_n}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du=O(1)+o(\ln n).$$

(1.36)-(1.39)-დან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

(1.40) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{C_1}{\ln n}=0.$$

განვიხილოთ C_2. მაშინ ინტეგრალში ცვლადის $u=\pi t/L_n$ შეცვლით

$$\int_0^{L_n}\tilde{D}_n^{L_n}(t)dt=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{L_n}\sin(\pi it/L_n)dt=$$

$$=\frac{L_n}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\pi}\sin itdt=\frac{L_n}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{-\cos it}{i}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{L_n}{\pi}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{i}\right)=\frac{2L_n}{\pi}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k+1}\right),$$

სადაც $k=[(n-1)/2]$. გვაქვს

$$\frac{2L_n}{\pi}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k+1}\right)=$$

$$=\frac{2L_n}{\pi}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k+1}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\right]\simeq$$

$$\simeq\frac{2L_n}{\pi}\left(\ln k-\frac{1}{2}\ln k\right)=\frac{L_n}{\pi}\ln k\,.$$

ვინაიდან $\ln k\simeq\ln n$, მივიღეთ, რომ

(1.41) $$\int_0^{L_n} D_n^{L_n}(t)dt\simeq\frac{L_n}{\pi}\ln n\,.$$

უკანასკნელის ძალით გვექნება

(1.42) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{C_2}{\ln n}=-\frac{d_x(f)}{\pi}\,.$$

საბოლოოდ (1.28)-(1.32), (1.40) და (1.42) შეფასებების ძალით გვაქვს (1.12) რაც ამტკიცებს თეორემის (i) ნაწილს.

(ii) განვიხილოთ ფუნქცია

(1.43) $$f_0(x)=\begin{cases}-2, & \text{თუ} \quad x\in[-1;0];\\ 2, & \text{თუ} \quad x\in(0;1).\end{cases}$$

ეს ფუნქცია გავაგრძელოთ მთელს ღერძზე პერიოდით 2.

L_n მიმდევრობა ავაგოთ შემდეგნაირად $L_n=\sqrt[4]{n}$.

ცხადია, რომ f_0 ფუნქცია 0-წერტილში განიცდის პირველი გვარის წყვეტას და $d_0(f_0)=4$. ვინაიდან f_0 ფუქცია 2-ით პერიოდულია, $\varphi(0,t)$ ფუნქციაც 2-ით პერიოდულია და

$$\varphi(0,t)=\begin{cases}0, & \text{თუ} \quad t\in[0;1);\\ -8, & \text{თუ} \quad t\in[1;2).\end{cases}$$

აღნიშნულიდან გამომდინარე ადვილი საჩვენებელია, რომ სრულდება (1.6) პირობა. საკმარისად მცირე h-ებისთვის $0<h<1$ გვაქვს

(1.44) $$\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_0^h|\varphi(0,t)|\,dt=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\int_0^h 0dt=0\,.$$

ვაჩვენოთ, რომ ამგვარად განსაზღვრული L_n მიმდევრობისთვის და (1.43) ფუნქციისთვის სრულდება (1.13), ვინაიდან $\varphi(0,t)$ პერიოდულია პერიოდით 2. ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება:

$$\int_1^{L_n}\frac{\varphi(0,t)}{t}dt=\int_1^{L_n}\frac{1}{t}d\int_0^t\varphi(0,s)ds=\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(0,s)ds\Bigg|_1^{L_n}+$$

$$+\int_1^{L_n}\frac{1}{t^2}\int_0^t\varphi(0,s)dsdt=\frac{1}{L_n}\int_0^{L_n}\varphi(0,s)ds-\int_0^1\varphi(0,s)ds+\int_1^{L_n}\frac{1}{t^2}\int_0^t\varphi(0,s)dsdt=$$

$$=\frac{1}{L_n}\sum_{k=1}^{[L_n/2]}\int_{2k-2}^{2k}\varphi(0,s)ds+\int_{2[L_n/2]}^{L_n}\varphi(0,s)ds-\int_0^1\varphi(0,s)ds+$$

$$+\int_1^2\frac{1}{t^2}\int_0^t\varphi(0,s)dsdt+\int_2^{L_n}\frac{1}{t^2}\int_0^t\varphi(0,s)dsdt=$$

$$=\frac{1}{L_n}\sum_{k=1}^{[L_n/2]}\int_0^2 \varphi(0,s)ds + O(1)+\int_2^{L_n}\frac{1}{t^2}\int_0^t \varphi(0,s)dsdt=$$

$$=O(1)+\int_2^{L_n}\frac{1}{t^2}\left(\sum_{k=1}^{[t/2]}\int_{2k-2}^{2k}\varphi(0,s)ds+\int_{2[t/2]}^{t}\varphi(0,s)ds\right)dt=$$

$$=O(1)+\int_2^{L_n}\frac{1}{t^2}\left(\sum_{k=1}^{[t/2]}\int_0^2\varphi(0,s)ds+O(1)\right)dt=$$

$$=O(1)-8\int_2^{L_n}\frac{1}{t^2}[t/2]dt=O(1)-4\int_2^{L_n}\frac{1}{t^2}2[t/2]dt=$$

$$=O(1)-4\int_2^{L_n}\frac{1}{t^2}(t-(t-2[t/2])dt=$$

$$=O(1)-4\int_2^{L_n}\frac{1}{t^2}(t-O(1))dt=O(1)-4\int_2^{L_n}\frac{dt}{t}=$$

(1.45) $$=O(1)-4\ln t\Big|_2^{L_n}=O(1)-4\ln L_n\simeq -\ln n\,.$$

განვიხილოთ $\tilde{S}_n^{L_n}(f_0;0)$. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში სამართლიანია (1.28)-(1.38) წარმოდგენები და შეფასებები. შესაფასებელი რჩება D_3 შესაკრები (1.34) წარმოდგენიდან.

$$D_3=\frac{1}{L_n}\int_\delta^{L_n}\varphi(0,u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)du=$$

(1.46) $$=\frac{1}{L_n}\int_\delta^{2}\varphi(0,u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)du+\frac{1}{L_n}\int_2^{L_n}\varphi(0,u)\tilde{D}_n^{L_n}(u)du=E_1+E_2\,.$$

განვიხილოთ E_1, (1.37) შეფასების თანახმად

(1.47) $$|E_1|\le\frac{1}{L_n}\int_\delta^2|\varphi(0,u)|\frac{2L_n}{\pi u}du\le\frac{2}{\pi\delta}\int_\delta^2|\varphi(0,u)|du=O(1)\,.$$

შევაფასოთ E_2.

$$E_2=\frac{1}{L_n}\int_2^{L_n}\varphi(0,u)\tilde{D}_n^{*L_n}(u)du+$$

(1.48) $$+\frac{1}{2L_n}\int_2^{L_n}\varphi(0,u)\sin(\pi nu/L_n)du=F_1+F_2\,,$$

სადაც

$$\tilde{D}_n^{*L_n}(u)=\tilde{D}_n^{L_n}(u)-\frac{1}{2}\sin(\pi nu/L_n)\,.$$

კარგადაა ცნობილი ([21], (5.2)), რომ

$$\tilde{D}_n^{*}(u)=\tilde{D}_n(u)-\frac{1}{2}\sin(\pi nu)=\frac{1-\cos nu}{2\tan(u/2)}\,.$$

ამიტომ (1.10)-ის ძალით და ცვლადის შეცვლით, ადვილად დავასკვნით, რომ

(1.49) $$\tilde{D}_n^{*L_n}(u)=\frac{1-\cos(\pi nu/L_n)}{2\tan(\pi u/2L_n)}\,.$$

შევაფასოთ F_2. $\varphi(0,u)$-ის არადადებითობის და პერიოდულობის გამო გვექნება

(1.50) $$|F_2| \le \frac{1}{2L_n}\int_2^{L_n}|\varphi(0,u)|\,du \le \frac{1}{2L_n}\int_2^{L_n}8du = 4\,.$$

ვინაიდან $\varphi(0,u)$ არაუარყოფითია, განვიხილოთ $-F_1$. (1.49) წარმოდგენის ძალით და ნაწილობითი ინტეგრებით გვაქვს

$$-F_1 = \frac{-1}{L_n}\int_2^{L_n}\varphi(0,u)\frac{1-\cos(\pi nu/L_n)}{2\tan(\pi u/2L_n)}du =$$

$$= \frac{-1}{2L_n}\int_2^{L_n}\varphi(0,u)\frac{1-\cos(\pi nu/L_n)}{\sin(\pi u/2L_n)}\cos(\pi u/2L_n)du \ge$$

$$\ge \frac{-1}{2L_n}\int_2^{L_n/2}\varphi(0,u)\frac{1-\cos(\pi nu/L_n)}{\sin(\pi u/2L_n)}\cos(\pi u/2L_n)du \ge$$

$$\ge -\frac{\sqrt{2}}{4L_n}\int_2^{L_n/2}\varphi(0,u)\frac{1-\cos(\pi nu/L_n)}{\sin(\pi u/2L_n)}du \ge$$

$$\ge -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\varphi(0,u)\frac{1-\cos(\pi nu/L_n)}{u}du =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{u}d\int_0^u\varphi(0,s)(1-\cos(\pi ns/L_n))ds =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{1}{u}\int_0^u\varphi(0,s)(1-\cos(\pi ns/L_n))ds\Bigg|_2^{L_n/2} -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\int_0^u\varphi(0,s)(1-\cos(\pi ns/L_n))dsdu =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\pi L_n}\int_0^{L_n/2}\varphi(0,s)(1-\cos(\pi ns/L_n))ds +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\int_0^2\varphi(0,s)(1-\cos(\pi ns/L_n))ds -$$

(1.51) $$-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\int_0^u\varphi(0,s)(1-\cos(\pi ns/L_n))dsdu = -G_1+G_2-G_3\,.$$

განვიხილოთ G_1. $\varphi(0,u)$-ის არაუარყოფითობის, პერიოდულობისა და მარტივი უტოლობის ($|1-\cos(\pi ns/L_n)|\le 2$) ძალით დავანდგენთ, რომ $G_1 = O(1)$. მსგავსი მსჯელობით დავასკვნით, რომ $G_2 = O(1)$.

შევაფასოთ $-G_3$:

$$-G_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\int_0^u\varphi(0,s)(1-\cos(\pi ns/L_n))ds = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\int_0^u\varphi(0,s)dsdu +$$

(1.52) $$+\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\int_0^u\varphi(0,s)\cos(\pi ns/L_n))dsdu = H_1+H_2\,.$$

ადგილი აქვს H_2 შესაკრების შემდეგ წარმოდგენას

$$H_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\sum_{k=1}^{[u/2]}\int_{2k-2}^{2k}\varphi(0,s)\cos(\pi ns/L_n))dsdu +$$

(1.53) $$+\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\int_{2[u/2]}^{u}\varphi(0,s)\cos(\pi ns/L_n))dsdu = I_1 + I_2 .$$

განვიხილოთ I_2. გვაქვს

(1.54) $$|I_2| \le \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\int_{2[u/2]}^{u}|\varphi(0,s)|dsdu \le \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{du}{u^2} = O(1) .$$

შევაფასოთ I_1. ჯამში თითოეულ შესაკრებში შევცვალოთ ცვლადით $s = t + 2k - 2$ და გამოვიყენოთ φ ფუნქციის პერიოდულობა პერიოდით 2. მაშინ

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\sum_{k=1}^{[u/2]}\int_{0}^{2}\varphi(0,t)\cos(\pi n(t+2k-2)/L_n)dtdu .$$

რადგან $n/L_n \to +\infty$, ამიტომ თანაბრად k-ს მიმართ

$$\int_{0}^{2}\varphi(0,t)\cos(\pi n(t+2k-2)/L_n)dt \to 0 ,\ \ n \to +\infty .$$

ამიტომ, ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის მოვძებნით ისეთ n_0 ნომერს, რომ როცა $n > n_0$ და ყოველი k-თვის

$$\left|\int_{0}^{2}\varphi(0,t)\cos(\pi n(t+2k-2)/L_n)dt\right| < \varepsilon .$$

მაშასადამე, გვექნება

$$\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\sum_{k=1}^{[u/2]}\int_{0}^{2}\varphi(0,t)\cos(\pi n(t+2k-2)/L_n)dtdu <$$

$$< \int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\sum_{k=1}^{[u/2]}\varepsilon du < \varepsilon\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\left[\frac{u}{2}\right]du = \frac{\varepsilon}{2}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}2\left[\frac{u}{2}\right]du\varepsilon =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\left(u - \left(u - 2\left[\frac{u}{2}\right]\right)\right)du = \frac{\varepsilon}{2}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\left(u - O(1)\right)du =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\int_{2}^{L_n/2}\frac{du}{u} - \varepsilon\int_{2}^{L_n/2}\frac{O(1)}{u^2}du = o(\ln L_n) .$$

თუ გავითვალისწინებთ L_n-მიმდევრობის განსაზღვრებას, მივიღებთ H_2 შესაკრების შეფასებას:

(1.55) $$H_2 = o(\ln n) .$$

განვიხილოთ H_1 შესაკრები. გამოვიყენოთ φ ფუნქციის პერიოდულობა პერიოდით 2, მაშინ გვექნება

$$H_1 \ge -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\sum_{k=1}^{[u/2]}\int_{2k-2}^{2k}\varphi(0,s)dsdu = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\sum_{k=1}^{[u/2]}\int_{0}^{2}\varphi(0,s)dsdu =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\left[\frac{u}{2}\right]du = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}2\left[\frac{u}{2}\right]du =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\left(u - \left(u - 2\left[\frac{u}{2}\right]\right)\right)du = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}\left(u - O(1)\right)du =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{2}^{L_n/2}\frac{du}{u} - O(1)\int_{2}^{L_n/2}\frac{1}{u^2}du = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ln L_n + O(1) .$$

საბოლოოდ, თუ გავითვალისწინებთ L_n-მიმდევრობის განსაზღვრებას, მაშინ საკმარისად დიდი n-ებისთვის გვექნება

(1.56)
$$H_1 \geq -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\ln n + O(1).$$

ესე იგი საბოლოოდ (1.52)-(1.56) შეფასებების ძალით გვექნება

$$G_3 \geq -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\ln n + O(1).$$

მაშინ ამ უკანასკნელი შეფასების და (1.46)-(1.48), (1.50) და (1.51) შეფასებების ძალით გვექნება

(1.57)
$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{|D_3|}{\ln n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2\pi}.$$

მეორე მხრივ, (1.46) წარმოდგენიდან განვიხილოთ E_2-ის შეფასება. (1.37)-ის ძალით გვაქვს:

$$|E_2| \leq \frac{1}{L_n}\int_2^{L_n}|\varphi(0,u)||\tilde{D}_n^{L_n}(u)|\,du \leq \frac{1}{L_n}\int_2^{L_n}|\varphi(0,u)|\frac{2L_n}{\pi u}\,du = \frac{2}{\pi}\int_2^{L_n}\frac{|\varphi(0,u)|}{u}\,du.$$

(1.45)-შეფასებაზე დაყრდნობით იოლი საჩვენებელია, რომ

$$\frac{2}{\pi}\int_2^{L_n}\frac{|\varphi(0,u)|}{u}\,du \simeq \frac{2}{\pi}\ln n,$$

ანუ

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{|D_3|}{\ln n} \leq \frac{2}{\pi}.$$

ამ უკანასკნელ და (1.57) შეფასებებზე დაყრდნობით და იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ $D_3 < 0$ გვაქვს: (1.43)-ით განსაზღვრული ფუნქცია პერიოდულია და მისთვის სრულდება (1.8). ამიტომ თეორემის მტკიცებიდან ადვილი დასანახია, რომ აღნიშნული ფუნქციისთვის აგრეთვე ძალაში რჩება (1.28)-(1.38), (1.41) და (1.42). განვიხილოთ

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{d_0(f_0)}\cdot\frac{\tilde{S}_n^{L_n}(f_0;0)}{\ln n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{4}\cdot\frac{A_1+A_2+A_3}{\ln n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{4}\cdot\frac{A_1}{\ln n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{4}\cdot\frac{B_1+B_2}{\ln n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{4}\cdot\frac{B_1}{\ln n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{4}\cdot\frac{C_1+C_2}{\ln n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{4}\cdot\frac{-D_1-D_2-D_3}{\ln n}+1\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\pi}{4}\cdot\frac{D_3}{\ln n}+1\right| < 1.$$

ეს უკანასკნელი შეფასება კი ამტკიცებს თეორემა 1.2.1-ის (ii) ნაწილს და ასრულებს თეორემის მტკიცებას.

თეორემა 1.2.2-ის დამტკიცება.

ცხადია თეორემა 1.2.2-ის მტკიცებისას გამოგვადგება თეორემა 1.2.1-ის მტკიცებისას გამოყენებული შეფასებების, წარმოდგენების და მეთოდების ნაწილი, რომელთა განხილვა თეორემა 1.2.2-ის მტკიცებაში აუცილებელი არ არის და

საკმარისი იქნებოდა მიგვეთითებინა შესაბამისი ფორმულის ნომერი, თუმცა მტკიცების სიცხადისათვის დამტკიცებას მოვიყვანთ სრულად.

განვიხილოთ $t_{n,\alpha_n}^{L_n}(f;x)$,

$$t_{n,\alpha_n}^{L_n}(f;x)=\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}\tilde{S}_k^{L_n}(f;x)=$$

$$=-\frac{1}{L_n}\int_{-L_n}^{L_n}f(t)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(t-x)dt\,,$$

სადაც

(1.58) $$\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(f;x)=\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}\tilde{D}_k^{L_n}(t)\,,$$

სადაც $A_n^{\alpha_n}$ განსაზღვრულია (1.5)-ით.

ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით $u=t-x$ მივიღებთ

$$t_{n,\alpha_n}^{L_n}(f;x)=-\frac{1}{L_n}\int_{-L_n-x}^{L_n-x}f(x+u)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du\,,$$

მეორე მხრივ, თუ ცვლადს შევცვლით $-u=t-x$ და გავითვალისწინებთ, რომ $\tilde{D}_k^{L}(t)$ კენტი ფუნქციაა t-ს მიმართ, მივიღებთ

$$t_{n,\alpha_n}^{L_n}(f;x)=\frac{1}{L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n+x}f(x-u)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du\,.$$

საბოლოოდ ინტეგრალის ადიციურობის ძალით გვექნება

$$t_{n,\alpha_n}^{L_n}(f;x)=-\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n-x}^{L_n-x}f(x+u)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du+$$

$$+\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n+x}f(x-u)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du=$$

$$=-\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n-x}(f(x+u)-f(x-u))\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du-$$

$$-\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n-x}^{-L_n+x}f(x+u)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du+$$

(1.59) $$+\frac{1}{2L_n}\int_{L_n-x}^{L_n+x}f(x-u)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du=A_1+A_2+A_3\,.$$

განვიხილოთ A_1. ვინაიდან $f(x+u)-f(x-u)$ და $\tilde{D}_n^{L_n}(u)$ u-ს მიმართ კენტი ფუნქციებია, ამიტომ გვექნება

$$A_1=-\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n-x}(f(x+u)-f(x-u))\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du=$$

$$=-\frac{1}{L_n}\int_{0}^{L_n-x}(f(x+u)-f(x-u))\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du=$$

$$=-\frac{1}{L_n}\int_{0}^{L_n}(f(x+u)-f(x-u))\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du+$$

(1.60) $$+\frac{1}{L_n}\int_{L_n-x}^{L_n}(f(x+u)-f(x-u))\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du = B_1 + B_2\,.$$

განვიხილოთ $\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)$. $\tilde{D}_n(u)$-ში (იხ. [21], თავი II, (5.6)) ცვლადის შეცვლით და $\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)$-ის წარმოდგენის (იხ. თეორემა 1.2.2) გამოყენებით მივიღებთ შეფასებას $\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)$-თვის:

$$|\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)| \le \frac{1}{\sin(\pi u/2L_n)}\,.$$

განვიხილოთ B_2. მაშინ ბოლოს მიღებული შეფასებიდან ადვილი დასანხია, რომ (1.8), (1.58)-ის და ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით დავადგენთ, რომ

$$B_2 \le \frac{1}{L_n}\int_{L_n-x}^{L_n}|f(x+u)-f(x-u)|\cdot|\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)|du \le$$

$$\le \frac{1}{L_n}\int_{L_n-x}^{L_n}|f(x+u)-f(x-u)|\cdot\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}|\tilde{D}_k^{L_n}(t)|du \le$$

$$\le \frac{1}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n}|f(x+u)-f(x-u)|\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}du \le$$

$$\le \frac{1}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n}|f(x+u)-f(x-u)|du \le$$

$$\le \frac{1}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n}\left(|f(x+u)|+|f(x-u)|\right)du =$$

(1.61) $$= \frac{1}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\left(\int_{L_n}^{L_n+x}|f(t)|dt + \int_{-L_n+2x}^{-L_n+x}|f(t)|dt\right) = O(1)\,.$$

განვიხილოთ A_2 და A_3. B_2-ის მსგავსად ადვილი დასანხია, რომ (1.8), (1.58)-ის და ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით მივიღებთ შეფასებებს:

$$|A_2| \le \frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{-L_n-x}^{-L_n+x}|f(x+u)|du =$$

(1.62) $$= \frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{-L_n}^{-L_n+2x}|f(t)|dt = O(1)\,,$$

და

$$|A_3| \le \frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n+x}|f(x-u)|du =$$

(1.63) $$= \frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{-L_n+2x}^{-L_n}|f(t)|dt = O(1)\,.$$

განვიხილოთ B_1,

$$B_1 = -\frac{1}{L_n}\int_{0}^{L_n}(f(x+u)-f(x-u)-d_x(f))\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du -$$

$$-\frac{d_x(f)}{L_n}\int_{0}^{L_n}\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du = C_1 + C_2\,.$$

შევაფასოთ C_1. (1.6)-ის ძალით ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის, მოიძებნება დადებითი რიცხვი $\delta = \delta(\varepsilon)$ (საზოგადოდ დამოკიდებული ε-ზე) ისეთი, რომ ადგილი ექნება (1.33).

ავიღოთ n იმდენად დიდი, რომ $1/n < \delta$, მაშინ მივიღებთ

$$C_1 = -\frac{1}{L_n}\int_0^{1/n}\varphi(x,u)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)u - \frac{1}{L_n}\int_{1/n}^{\delta}\varphi(x,u)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du -$$

(1.64)
$$-\frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{L_n}\varphi(x,u)\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du = -D_1 - D_2 - D_3 .$$

(1.10), (1.35) და (1.58)-ის ძალით ყოველი u-თვის ადვილად დავასკვნით, რომ

$$|\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)| \le \frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-1}|\tilde{D}_k^{L_n}(t)| \le$$

(1.65)
$$\le \frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-1}k < \frac{n}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-1} = n .$$

ამიტომ (1.33) და (1.65)-ის საფუძველზე დავასკვნით

(1.66)
$$|D_1| \le \frac{n}{L_n}\int_0^{1/n}|\varphi(x,u)|du < \frac{\varepsilon}{L_n} .$$

(1.37) და (1.58)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$|\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)| \le \frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-1}|\tilde{D}_k^{L_n}(t)| \le$$

(1.67)
$$\le \frac{2L_n}{\pi u}\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-1} = \frac{2L_n}{\pi u},\ \ 0 < u \le L_n .$$

მაშინ (1.67) შეფასებიდან გამომდინარე ნაწილობითი ინტეგრებით დავადგენთ შემდეგი შეფასების სამართლიანობას

$$|D_2| \le \frac{1}{L_n}\int_{1/n}^{\delta}|\varphi(x,u)|\frac{2L_n}{\pi u}du = \frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{u}d\int_0^u|\varphi(x,t)|dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{u}\int_0^u|\varphi(x,t)|dt\Bigg|_{1/n}^{\delta} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(x,t)|dtdu = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}|\varphi(x,t)|dt -$$

$$-\frac{2n}{\pi}\int_0^{1/n}|\varphi(x,t)|dt + \frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(x,t)|dtdu \le$$

(1.68)
$$\le \frac{2\varepsilon}{\pi}\left(2 + \int_{1/n}^{\delta}\frac{du}{u}\right) = \frac{2\varepsilon}{\pi}(2 + \ln\delta - \ln 1 + \ln n)) = o(\ln n) .$$

ამასთან (1.11) და (1.67)-ის ძალით გვექნება

$$|D_3| \le \frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{L_n}|\varphi(x,u)|\frac{2L_n}{\pi u}du = \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{L_n}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{1}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du + \frac{2}{\pi}\int_{1}^{L_n}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du \le \frac{2}{\pi\delta}\int_{\delta}^{1}|\varphi(x,u)|du +$$

(1.69) $$+\frac{2}{\pi}\int_1^{L_n}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du=O(1)+o(\ln n).$$

(1.59)-(1.69)-დან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

(1.70) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{C_1}{\ln n}=0.$$

განვიხილოთ C_2.

$$C_2=-\frac{d_x(f)}{L_n}\int_0^{L_n}\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)du=-\frac{d_x(f)}{L_n}\int_0^{L_n}\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}\tilde{D}_k^{L_n}(t)du=$$

$$=-\frac{d_x(f)}{L_n}\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}\int_0^{L_n}\tilde{D}_k^{L_n}(t)du=-\frac{d_x(f)}{L_n}\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}U_k^{L_n}.$$

შევაფასოთ

$$\frac{\pi}{L_nA_n^{\alpha_n}\ln n}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha_n-1}U_k^{L_n}.$$

(1.41)-ის ძალით ყოველი $\varepsilon>0$, არსებობს ისეთი $N=N(\varepsilon)$, რომ ყოველი $k\ge N$, გვაქვს

(1.71) $$1-\varepsilon<\frac{\pi\cdot U_k^{L_n}}{L_n\cdot\ln k}<1+\varepsilon.$$

α_n მიმდევრობა დავყოთ ორ ქვემიმდევრობად შემდეგნაირად $\alpha_{m_i}\in[0;1)$ და $\alpha_{k_i}\in[1;b]$, $\forall i\in\mathbb{N}$. $\{m_1,m_2,...\}\cup\{k_1,k_2,...\}=\mathbb{N}$, $\{m_1,m_2,...\}\cap\{k_1,k_2,...\}=\varnothing$.

ჯერ განვიხილოთ α_{m_i} ქვემიმდევრობა:

$$\frac{\pi}{L_iA_i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i}=\frac{\pi}{L_iA_i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i}+$$

$$+\frac{\pi}{L_iA_i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\sum_{k=[i/M]+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i}=E_1+E_2.$$

E_2 გამოსახულება შევაფასოთ ქვემოდან. (1.71)-ის ძალით გვაქვს

$$E_2=\frac{\pi}{L_iA_i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\sum_{k=[i/M]+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i}>$$

$$>\frac{1}{\ln i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=[i/M]+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}(1-\varepsilon)\ln k>$$

$$>\frac{(1-\varepsilon)(\ln i-\ln M)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=[i/M]+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}=$$

$$=\frac{(1-\varepsilon)(\ln i-\ln M)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\left(\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}-\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}\right)=$$

$$=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)-(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}=$$

$$=F_1-F_2.$$

თუ $0<\alpha_{m_i}<1$, მაშინ $-1<\alpha_{m_i}-1<0$. აქედან გამომდინარეობს $A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}$-ის კლებადობა. ამგვარად, გვექნება

$$F_2 = (1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} \le$$

$$\le (1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]} A_{i-[i/M]}^{\alpha_{m_i}-1}.$$

თუ $M = M(\varepsilon)$-ს იმდენად დიდს ავიღებთ, რომ $1/M < \varepsilon$ და $A_i^{\alpha_{m_i}}$ რიცხვების შეფასებებს გავითვალისწინებთ (იხ. [9] ლემა 2) მივიღებთ

$$(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]} A_{i-[i/M]}^{\alpha_{m_i}-1} =$$

$$= O\left(\frac{i^{-\alpha_{m_i}}\cdot\alpha_{m_i}}{\left(i-i/M\right)^{1-\alpha_{m_i}}}\cdot\frac{i}{M}\right) = O\left(\frac{i^{-\alpha_{m_i}}\cdot\alpha_{m_i}}{i^{1-\alpha_{m_i}}}\cdot\frac{i}{M}\right) = o(1).$$

ამგვარად,

$$F_1 = (1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right),$$

მაშასადამე,

$$F_2 = o(1).$$

ამის გარდა, (1.71) ძალით და $A_i^{\alpha_{m_i}}$ მიმდევრობის კლებადობის გამო i-ს მიმართ სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$E_1 = \frac{\pi}{L_i A_i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i} + \frac{\pi}{L_i A_i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\sum_{k=N+1}^{[i/M]} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i} \ge$$

$$\ge \frac{\pi C_1(N)}{L_i A_i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} + \frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=N+1}^{[i/M]} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}(1-\varepsilon)\ln k \ge$$

$$\ge \frac{\pi C_1(N)}{L_i A_i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\sum_{k=0}^{N} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} + \frac{(1-\varepsilon)\ln N}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=N+1}^{[i/M]} A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1} \ge$$

$$\ge \frac{\pi C_1(N)}{L_i A_i^{\alpha_{m_i}}\ln i}\sum_{k=0}^{N} A_{i}^{\alpha_{m_i}-1} + \frac{(1-\varepsilon)\ln N}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=N+1}^{[i/M]} A_{i}^{\alpha_{m_i}-1} =$$

$$= O\left(\frac{i^{-\alpha_{m_i}}\cdot\alpha_{m_i}}{i^{1-\alpha_{m_i}}\cdot L_i\cdot\ln i}\right) + O\left(\frac{i^{-\alpha_{m_i}}\cdot\alpha_{m_i}}{i^{1-\alpha_{m_i}}\ln i}\cdot\left(\frac{i}{M}-N\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{i\cdot L_i\cdot\ln i}\right) + O\left(\frac{(i-MN)\cdot i^{-\alpha_{m_i}}\cdot\alpha_{m_i}}{i^{1-\alpha_{m_i}}\cdot M\cdot\ln i}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{i\cdot L_i\cdot\ln i}\right) + O\left(\frac{1}{\ln i}\right),$$

სადაც

$$C_1(N) = \min_{0\le k\le N}\left|U_k^{L_i}\right|.$$

მაშასადამე,

$$\varliminf_{i\to+\infty}\frac{\pi}{L_i\ln i}\int_0^{L_i}\tau_{i,\alpha_{m_i}}^{L_i}(t)\,dt = \varliminf_{i\to+\infty}(E_1+E_2) \ge$$

$$\ge \varliminf_{i\to+\infty}(E_1+F_1-F_2) = \varliminf_{i\to+\infty}F_1 = 1.$$

C_2 წევრში მოცემული ინტეგრალი α_{m_i} მიმდევრობისთვის შევაფასოთ ზემოდან. (1.71)-ის ძალით გვაქვს

$$\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i}\int_0^{L_i}\tau_{i,\alpha_{m_i}}^{L_i}(u)dt=\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i}\int_0^{L_i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}\tilde{D}_k^{L_i}(t)dt=$$

$$=\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}\int_0^{L_i}\tilde{D}_k^{L_i}(t)dt=\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i}=$$

$$=\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{N}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i}+\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=N+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i}\le$$

$$=\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{N}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}U_k^{L_i}+\frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=N+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}(1+\varepsilon)\ln k\le$$

$$\le\frac{\pi C_2(N)}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{N}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}+\frac{(1+\varepsilon)\ln i}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=N+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}.$$

$A_i^{\alpha_{m_i}}$ მიმდევრობის i-ს მიმართ კლებადობის გამო და $A_i^{\alpha_{m_i}}$ რიცხვების შეფასებებიდან (იხ. [9] ლემა 2) მივიღებთ:

$$\frac{\pi C_2(N)}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{N}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}+\frac{(1+\varepsilon)\ln i}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=N+1}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}\le$$

$$\le\frac{\pi C_2(N)}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{N}A_{i-N}^{\alpha_{m_i}-1}+\frac{(1+\varepsilon)}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\left(\sum_{k=0}^{i}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}-\sum_{k=0}^{N}A_{i-k}^{\alpha_{m_i}-1}\right)\le$$

$$\le\frac{\pi C_2(N)}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{N}A_{i-N}^{\alpha_{m_i}-1}+(1+\varepsilon)-\frac{(1+\varepsilon)}{A_i^{\alpha_{m_i}}}\sum_{k=0}^{N}A_i^{\alpha_{m_i}-1}=$$

$$=1+\varepsilon+O\left(\left(1-\frac{N}{i}\right)^{\alpha_{m_i}}\frac{1}{(i-N)\cdot L_i\cdot\ln i}\right)+O\left(\frac{1}{i\ln i}\right)$$

$$=1+\varepsilon+O\left(\frac{1}{i\ln i}\right),$$

სადაც

$$C_2(N)=\max_{0\le k\le N}\left|U_k^{L_i}\right|,$$

ე. ი.

$$\overline{\lim_{i\to+\infty}}\frac{\pi}{L_i\ln i}\int_0^{L_i}\tau_{i,\alpha_{m_i}}^{L_i}(t)dt\le 1.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{\pi}{L_i\ln i}\int_0^{L_i}\tau_{i,\alpha_{m_i}}^{L_i}(t)dt=1.$$

C_2-ში მოცემული ინტეგრალი α_{k_i} მიმდევრობისთვის შევაფასოთ ქვემოდან. (1.71)-ის ძალით გვაქვს

$$\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i}\int_0^{L_i}\tau_{i,\alpha_{k_i}}^{L_i}(u)dt=\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i}\int_0^{L_i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\tilde{D}_j^{L_i}(t)dt=$$

$$=\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\int_0^{L_i}\tilde{D}_j^{L_i}(t)=\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=0}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j^{L_i}+$$

$$+\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=[i/M]+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j^{L_i}=G_1+G_2\,.$$

განვიხილოთ G_2. ვინაიდან $1\le\alpha_{k_i}\le b$, მაშინ $A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}$ კლებადია j-ს მიმართ, მაშინ (1.71) ძალით გვექნება:

$$G_2=\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=[i/M]+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j^{L_i}>$$

$$>\frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=[i/M]+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}(1-\varepsilon)\ln j>$$

$$>\frac{(1-\varepsilon)(\ln i-\ln M)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=[i/M]+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}=$$

$$=\frac{(1-\varepsilon)(\ln i-\ln M)}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\left(\sum_{j=0}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}-\sum_{j=0}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\right)=$$

$$=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\left(1-\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\right)=H_1-H_2\,.$$

რადგან $A_i^{\alpha_{k_i}-1}$ ზრდადია როგორც i-ს ფუნქცია, ამიტომ

$$H_1=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right),$$

ხოლო

$$H_2=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\le$$

$$\le(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\ln M}{\ln i}\right)\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{k=0}^{[i/M]}A_i^{\alpha_{k_i}-1}=$$

$$=O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}\cdot\alpha_{k_i}}{i^{1-\alpha_{k_i}}}\cdot\frac{i}{M}\right)=O\left(\frac{1}{M}\right).$$

$M=M(\varepsilon)$-ის ხარჯზე შეგვიძლია მივიღოთ შეფასება:

$$H_2=o(1)\,.$$

(1.71)-ძალით და $A_i^{\alpha_{k_i}-1}$ ზრდადობიდან გვაქვს:

$$G_1=\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=0}^{N}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j^{L_i}+\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=N+1}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j^{L_i}\ge$$

$$\ge\frac{C_1(N)}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}+\frac{1}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=N+1}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}(1-\varepsilon)\ln j\ge$$

$$\ge\frac{C_1(N)}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}+\frac{(1-\varepsilon)\ln N}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=N+1}^{[i/M]}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\ge$$

$$\ge\frac{C_1(N)}{L_i\cdot\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{k=0}^{N}A_{i-N}^{\alpha_{k_i}-1}+\frac{(1-\varepsilon)\ln N}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{k=N+1}^{[i/M]}A_{i-[i/M]}^{\alpha_{k_i}-1}=$$

$$=O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}\cdot\alpha_{k_i}}{(i-N)^{1-\alpha_{k_i}}\,L_i\cdot\ln i}\right)+O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}\cdot\alpha_{k_i}}{\ln i\cdot(i-i/M)^{1-\alpha_{k_i}}}\cdot\left(\frac{i}{M}-N\right)\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{i\cdot L_i\cdot\ln i}\right)+O\left(\frac{(i-MN)\cdot\alpha_{k_i}}{i\cdot M^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{i\cdot L_i\cdot\ln i}\right)+O\left(\frac{1}{\ln i}\right).$$

აქედან დავასკვნით, რომ

$$\underline{\lim}_{i\to+\infty}\frac{\pi}{L_i\ln i}\int_0^{L_i}\tau_{i,\alpha_{k_i}}^{L_i}(u)dt=\underline{\lim}_{i\to+\infty}(G_1+G_2)\geq$$

$$\geq\lim_{i\to+\infty}(G_1+H_1-H_2)=\lim_{i\to+\infty}H_1=1.$$

ახლა შევაფასოთ იგივე გამოსახულება ზემოდან. (1.71)-ის ძალით გვაქვს:

$$\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i}\int_0^{L_i}\tau_{i,\alpha_{k_i}}^{L_i}(u)dt=\frac{\pi}{L_i\cdot\ln i}\int_0^{L_i}\frac{1}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\tilde{D}_j^{L_i}(t)dt=$$

$$=\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\int_0^{L_i}\tilde{D}_j^{L_i}(t)=\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=0}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j^{L_i}=$$

$$=\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=0}^{N}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j^{L_i}+\frac{\pi}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=N+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}U_j^{L_i}\leq$$

$$\leq\frac{\pi C_2(N)}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=0}^{N}A_i^{\alpha_{k_i}-1}+\frac{1+\varepsilon}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=N+1}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\ln j\leq$$

$$\leq\frac{\pi C_2(N)}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{k=0}^{N}A_i^{\alpha_{k_i}-1}+\frac{(1+\varepsilon)\ln i}{\ln i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}}\left(\sum_{j=0}^{i}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}-\sum_{j=N+1}^{N}A_{i-j}^{\alpha_{k_i}-1}\right)=$$

$$=\frac{\pi C_2(N)}{L_i\cdot A_i^{\alpha_{k_i}}\cdot\ln i}\sum_{j=0}^{N}A_i^{\alpha_{k_i}-1}+1+\varepsilon-\frac{(1+\varepsilon)}{A_i^{\alpha_{k_i}}}\sum_{j=0}^{N}A_{i-N}^{\alpha_{k_i}-1}=$$

$$=1+\varepsilon+O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}}{i^{1-\alpha_{k_i}}\cdot L_i\cdot\ln i}\right)+O\left(\frac{i^{-\alpha_{k_i}}}{(i-N)^{1-\alpha_{k_i}}}\right)=$$

$$=1+\varepsilon+O\left(\frac{1}{i\cdot L_i\cdot\ln i}\right)+O\left(\frac{1}{\ln i}\right);$$

ე. ი.

$$\overline{\lim}_{i\to+\infty}\frac{\pi}{L_i\ln i}\int_0^{L_i}\tau_{i,\alpha_{k_i}}^{L_i}(u)dt\leq 1,$$

ანუ გვაქვს

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{\pi}{L_i\ln i}\int_0^{L_i}\tau_{i,\alpha_{k_i}}^{L_i}(u)dt=1.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{L_n\ln n}\int_0^{L_n}\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)dt=1,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

(1.72) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{C_2}{\ln n}=-\frac{d_x(f)}{\pi}.$$

ეს უკანასკნელი კი (1.70) ერთად ამტკიცებს (1.14). ამით თეორემა 1.2.2-ის (i) ნაწილი დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ (ii).

განვიხილოთ (1.43) ფორმულით განსაზღვრული ფუნქცია, ვთქვათ $L_n = \sqrt{n}$. ცხადია ამ ფუნქციისთვის და L_n მიმდევრობისთვის 0-წერტილში სრულდება (1.6) და (1.13), რასაც ამტკიცებს (1.44) და (1.45).

თეორემა 1.2.2-ის (i) ნაწილის მტკიცებიდან გამომდინარე ამ შემთხვევაშიც სამართლიანი იქნება (1.59)-(1.68) და (1.72) შეფასებების ანალოგები. გასახილველი გვრჩება D_3 (იხ. (1.64)). განვიხილოთ წარმოდგენა (იხ. [21], თავი. III, თეორემა (1.22)-ის დამტკიცება)

$$\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-1}\tilde{D}_k^{L_n}(t) = \frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}A_k^1\tilde{K}_k^{L_n}(t),$$

სადაც $\tilde{K}_k^{L_n}(t)$ დირიხლეს შეუღლებული გულის ფეიერის საშუალოა, ანუ

$$\tilde{K}_k^{L_n}(t) = \frac{1}{k+1}\sum_{s=0}^{k}\tilde{D}_s^{L_n}(t).$$

განვიხილოთ D_3.

$$D_3 = \frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{L_n}\varphi(0,u)\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}A_k^1\tilde{K}_k^{L_n}(t)du =$$

$$= \frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{2}\varphi(0,u)\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}A_k^1\tilde{K}_k^{L_n}(t)du +$$

$$+\frac{1}{L_n}\int_{2}^{L_n}\varphi(0,u)\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}A_k^1\tilde{K}_k^{L_n}(t)du = I_1 + I_2.$$

შევაფასოთ ზემოდან I_1. (1.67)-ის ძალით გვაქვს

$$I_1 = \frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{2}\varphi(0,u)\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}A_k^1\tilde{K}_k^{L_n}(u)du \le 2\int_{\delta}^{2}|\varphi(0,u)|\frac{du}{u} \le$$

$$\le \frac{2}{\delta}\int_{\delta}^{2}|\varphi(0,u)|\,du \le \frac{2}{\delta}\int_{0}^{2}|\varphi(0,u)|\,du = \frac{16}{\delta}.$$

დირიხლეს შეუღლებული გულის ფეიერის $\tilde{K}_n(t)$ საშუალოს ცნობილი წარმოდგენაში ცვლადის შეცვლის ძალით მივიღებთ $\tilde{K}_k^{L_n}(t)$-სთვის ანალოგიურ წარმოდგენას

$$\tilde{K}_k^{L_n}(t) = \frac{1}{2}\cot(\pi t/2L_n) - \frac{\sin((k+1)\pi t/L_n)}{(k+1)(2\sin(\pi t/2L_n))^2}.$$

ამგვარად, I_2 წევრისთვის გვაქვს

$$I_2 = \frac{1}{L_n}\int_{2}^{L_n}\varphi(0,t)\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}A_k^1\left(\frac{1}{2}\cot(\pi t/2L_n) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin((k+1)\pi t/L_n)}{(k+1)(2\sin(\pi t/2L_n))^2}\right)dt = J_1 - J_2.$$

განვიხილოთ $-J_1$, ვინაიდან $\varphi(0,t) \le 0$ ყველა t-სთვის, მაშინ ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$-J_1 = \frac{-1}{2L_n}\int_{2}^{L_n}\varphi(0,t)\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}A_k^1\cot(\pi t/2L_n)dt =$$

$$=\frac{-1}{2L_n}\int_2^{L_n}\varphi(0,t)\cot(\pi t/2L_n)dt \ge \frac{-1}{2L_n}\int_2^{L_n/2}\varphi(0,t)\cot(\pi t/2L_n)dt \ge$$

$$\ge -\frac{\sqrt{2}}{4L_n}\int_2^{L_n/2}\frac{\varphi(0,t)}{\sin(\pi t/2L_n)}dt \ge -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{\varphi(0,t)}{t}dt =$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t}d\int_0^t\varphi(0,s)ds = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(0,s)ds\Big|_2^{L_n/2} -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\int_0^t\varphi(0,s)dsdt = -\frac{\sqrt{2}}{\pi L_n}\int_0^{L_n/2}\varphi(0,s)ds +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\int_0^2\varphi(0,s)ds - \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\int_0^t\varphi(0,s)dsdt = -K_1+K_2-K_3 .$$

შევაფასოთ K_2,

$$K_2=\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\int_0^2\varphi(0,s)ds = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} .$$

K_1 წევრის შესაფასებლად საკმარისია გავითვალისწინოთ შეფასება $|\varphi(0,t)|\le 8$. ამიტომ მარტივად დავასკვნით, რომ

$$|K_1|\le\frac{\sqrt{2}}{\pi L_n}\int_0^{L_n/2}8ds = O(1) .$$

განვიხილოთ $-K_3$:

$$-K_3=-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\left(\sum_{k=1}^{[t/2]}\int_{2k-2}^{2k}\varphi(0,s)ds+\int_{2[t/2]}^{t}\varphi(0,s)ds\right)dt = M_1+M_2 .$$

შევაფასოთ M_2 ზემოდან, გვაქვს

$$|M_2|\le\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\int_{2[t/2]}^{t}|\varphi(0,s)|dsdt \le$$

$$\le\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\int_0^2|\varphi(0,s)|dsdt = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{dt}{t^2} \le \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = O(1) .$$

M_1-თვის მივიღებთ:

$$M_1=-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{[t/2]}\int_{2k-2}^{2k}\varphi(0,s)dsdt =$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{[t/2]}\int_0^2\varphi(0,s)dsdt =$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\left[\frac{t}{2}\right]dt = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}2\left[\frac{t}{2}\right]dt =$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\left(t-\left(t-2\left[\frac{t}{2}\right]\right)\right)dt = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t^2}\big(t-O(1)\big)dt =$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_2^{L_n/2}\frac{1}{t}dt+O(1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ln t\Big|_2^{L_n/2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ln(L_n/2) + O(1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ln L_n + O(1) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ln L_n + O(1) .$$

ამიტომ L_n მიმდევრობის განსაზღვრის ძალით გვაქვს

$$M_1 \simeq \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\ln n .$$

განვიხილოთ J_2, ვინაიდან $A_k^1 = k+1$ გვექნება

$$|J_2| = \left| \frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{L_n} \varphi(0,t)\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}A_k^1 \frac{\sin((k+1)\pi t/L_n)}{(k+1)(2\sin(\pi t/2L_n))^2}dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{L_n} \varphi(0,t)\frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}\frac{\sin((k+1)\pi t/L_n)}{(2\sin(\pi t/2L_n))^2}dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{A_n^{\alpha_n}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha_n-2}\frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{L_n}|\varphi(0,t)|\frac{1}{(2\sin(\pi t/2L_n))^2}dt \le$$

$$\le \frac{A_n^{\alpha_n-1}}{A_n^{\alpha_n}}\cdot\frac{2}{L_n}\int_{\delta}^{L_n}\frac{dt}{\sin^2(\pi t/2L_n)} \le \frac{8L_nA_n^{\alpha_n-1}}{A_n^{\alpha_n}}\int_{\delta}^{L_n}\frac{dt}{t^2} \le$$

$$\le \frac{A_n^{\alpha_n-1}}{A_n^{\alpha_n}}\cdot\frac{8L_n}{\pi^2}\int_{\delta}^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = O\left(\frac{n^{\alpha_n-1}\sqrt[4]{n}}{n^{\alpha_n}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right) \to 0 ,$$

$n \to +\infty$. მაშასადამე, გვექნება

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{|D_3|}{\ln n} \ge \frac{\sqrt{2}}{2\pi} .$$

მეორე მხრივ D_3-ის წარმოდგენიდან განვიხილოთ I_2 წევრის შეფასება. (1.67)-ის ძალით გვაქვს:

$$|I_2| \le \frac{1}{L_n}\int_{2}^{L_n}|\varphi(0,u)||\tau_{n,\alpha_n}^{L_n}(u)|du \le \frac{1}{L_n}\int_{2}^{L_n}|\varphi(0,u)|\frac{2L_n}{\pi u}du = \frac{2}{\pi}\int_{2}^{L_n}\frac{|\varphi(0,u)|}{u}du .$$

(1.45)-შეფასებების გათვალისწინებით იოლი საჩვენებელია, რომ

$$\frac{2}{\pi}\int_{2}^{L_n}\frac{|\varphi(0,u)|}{u}du \simeq \frac{2}{\pi}\ln n ,$$

ანუ

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{|D_3|}{\ln n} \le \frac{2}{\pi} .$$

ამ უკანასკნელ შეფასებებზე დაყრდნობით გვაქვს:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-\pi}{d_0(f)}\frac{C_1}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-\pi}{4}\frac{-D_1-D_2-D_3}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{4}\frac{I_1+I_2}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{4}\frac{J_1-J_2}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{4}\frac{K_1-K_2+K_3}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{4}\frac{-M_1-M_2}{\ln n} = P .$$

$|D_3|$-ის მიღებული შეფასებებიდან გვაქვს, რომ $P<0$ და $|P|<1$, ამიტომ ბოლო შეფასებიდან და (1.72)-დან საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{d_0(f_0)}\cdot\frac{t_{n,\alpha_n}^{L_n}(f_0;0)}{\ln n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{4}\cdot\frac{C_1+C_2}{\ln n}\right| = |P+1| \ne 1 .$$

თეორემა 1.2.2 დამტკიცებულია.

თეორემა 1.2.3-ის დამტკიცება.

განვიხილოთ $\tilde{\sigma}_n^{L_n}(f;x)$,

$$\tilde{\sigma}_n^{L_n}(f;x)=\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{S}_k^{L_n}(f;x)=$$

$$=-\frac{1}{L_n}\int_{-L_n}^{L_n} f(t)\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(t-x)dt\ ,$$

სადაც $\tilde{D}_k^{L_n}(t)$ განსაზღვრულია (1.10),

ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით $u=t-x$ მივიღებთ

$$\tilde{\sigma}_n^{L_n}(f;x)=-\frac{1}{L_n}\int_{-L_n-x}^{L_n-x} f(x+u)\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du\ .$$

მეორე მხრივ, თუ ცვლადს შევცვლით $-u=t-x$ და გავითვალისწინებთ, რომ $\tilde{D}_k^{L}(t)$ კენტი ფუნქციაა t-ს მიმართ, მივიღებთ

$$\tilde{\sigma}_n^{L_n}(f;x)=\frac{1}{L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n+x} f(x-u)\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du\ .$$

საბოლოოდ ინტეგრალის ადიციურობის ძალით გვექნება

$$\tilde{\sigma}_n^{L_n}(f;x)=-\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n-x}^{L_n-x} f(x+u)\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du+$$

$$+\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n+x} f(x-u)\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du=$$

$$=-\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n-x} (f(x+u)-f(x-u))\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du-$$

$$-\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n-x}^{-L_n+x} f(x+u)\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du+$$

(1.73)
$$+\frac{1}{2L_n}\int_{L_n-x}^{L_n+x} f(x-u)\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du=A_1+A_2+A_3\ .$$

განვიხილოთ A_1. ვინაიდან $f(x+u)-f(x-u)$ და $\tilde{D}_n^{L_n}(u)$ u-ს მიმართ კენტი ფუნქციებია, ამიტომ გვექნება

$$A_1=-\frac{1}{2L_n}\int_{-L_n+x}^{L_n-x} (f(x+u)-f(x-u))\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du=$$

$$=-\frac{1}{L_n}\int_{0}^{L_n-x} (f(x+u)-f(x-u))\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du=$$

$$=-\frac{1}{L_n}\int_{0}^{L_n} (f(x+u)-f(x-u))\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du+$$

(1.74) $$+\frac{1}{L_n}\int_{L_n-x}^{L_n}(f(x+u)-f(x-u))\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du=B_1+B_2 .$$

განვიხილოთ $\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)$, $\tilde{D}_n(u)$-ის წარმოდგენაში (იხ. [21], თავი II, (5.6)) ცვლადის შეცვლით მივიღებთ შეფასებას $\tilde{D}_n^{L_n}(u)$-თვის:

$$|\tilde{D}_n^{L_n}(u)|\le\frac{1}{\sin(\pi u/2L_n)};$$

ხოლო უკანასკნელიდან მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\,|\tilde{D}_k^{L_n}(u)|\le\frac{A_n}{\sin(\pi u/2L_n)},$$

სადაც $A_n=\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}$ და $A_n\to 1$, $n\to+\infty$.

განვიხილოთ B_2. ბოლო შეფასებიდან (1.8)-ის გათვალისწინებით და ინტეგრალში ცვლადის შეცვლის ძალით დავადგენთ, რომ

$$B_2\le\frac{1}{L_n}\int_{L_n-x}^{L_n}|f(x+u)-f(x-u)|\cdot|\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)|\,du\le$$

$$\le\frac{1}{L_n}\int_{L_n-x}^{L_n}|f(x+u)-f(x-u)|\cdot\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\,|\tilde{D}_k^{L_n}(u)|du\le$$

$$\le\frac{1}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n}|f(x+u)-f(x-u)|\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}du\le$$

$$\le\frac{A_n}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n}|f(x+u)-f(x-u)|\,du\le$$

$$\le\frac{A_n}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n}\big(|f(x+u)|+|f(x-u)|\big)du=$$

(1.75) $$=\frac{A_n}{L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\left(\int_{L_n}^{L_n+x}|f(t)|\,dt+\int_{-L_n+2x}^{-L_n+x}|f(t)|\,dt\right)=O(1).$$

ვინაიდან $A_n\to 1$, $n\to+\infty$, შემდეგ შეფასებებში გამოვტოვებთ აღნიშნულ გამოსახულებას.

განვიხილოთ A_2, A_3. მაშინ B_2-ის მსგავსად ადვილი დასანხია, რომ (1.8)-ის და ინტეგრალში ცვლადის შეცვლის ძალით მივიღებთ შეფასებებს:

$$|A_2|\le\frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{-L_n-x}^{-L_n+x}|f(x+u)|\,du=$$

(1.76) $$=\frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{-L_n}^{-L_n+2x}|f(t)|\,dt=O(1),$$

და

$$|A_3|\le\frac{1}{2L_n\sin[\pi(L_n-x)/2L_n]}\int_{L_n-x}^{L_n+x}|f(x-u)|\,du=$$

$$= \frac{1}{2L_n \sin[\pi(L_n - x)/2L_n]} \int_{-L_n+2x}^{-L_n} |f(t)|\,dt = O(1)\,. \tag{1.77}$$

განვიხილოთ B_1,

$$B_1 = -\frac{1}{L_n}\int_0^{L_n} (f(x+u) - f(x-u) - d_x(f)) \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} \tilde{D}_k^{L_n}(u)du -$$

$$-\frac{d_x(f)}{L_n}\int_0^{L_n} \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} \tilde{D}_k^{L_n}(u)du = C_1 + C_2\,.$$

შევაფასოთ C_1. (1.6)-ის ძალით ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის, მოიძებნება დადებითი რიცხვი (საზოგადოდ დამოკიდებული ε-ზე) $\delta = \delta(\varepsilon)$ ისეთი, რომ ადგილი ექნება (1.33).

ვინაიდან

$$\lim_{n\to+\infty} q(n) = +\infty\,,$$

ავიღოთ n იმდენად დიდი, რომ $1/q(n) < \delta$. მაშინ მივიღებთ

$$C_1 = -\frac{1}{L_n}\int_0^{1/q(n)} \varphi(x,u) \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} \tilde{D}_k^{L_n}(u)u -$$

$$-\frac{1}{L_n}\int_{1/q(n)}^{\delta} \varphi(x,u) \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} \tilde{D}_k^{L_n}(u)du -$$

$$-\frac{1}{L_n}\int_{\delta}^{L_n} \varphi(x,u) \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} \tilde{D}_k^{L_n}(u)du = -D_1 - D_2 - D_3\,. \tag{1.78}$$

შევაფასოთ დირიხლეს შეუღლებული (1.10) გულის წრფივი საშუალო. (1.35) ძალით ყოველი u-თვის ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\left|\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} \tilde{D}_k^{L_n}(u)\right| \le \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\, |\tilde{D}_k^{L_n}(u)| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} k \le q(n) \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} = A_n \cdot q(n)\,. \tag{1.79}$$

ამიტომ (1.33) და (1.79)-ის ძალით გვექნება

$$|D_1| \le \frac{q(n)}{L_n}\int_0^{1/q(n)} |\varphi(x,u)|\,du < \frac{\varepsilon}{L_n}\,. \tag{1.80}$$

(1.37)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left|\sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} \tilde{D}_k^{L_n}(u)\right| \le \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk}\, |\tilde{D}_k^{L_n}(u)| \le$$

$$\le \frac{2L_n}{\pi u} \cdot \sum_{k=0}^{q(n)} a_{nk} = \frac{2L_n}{\pi u} \cdot A_n,\ \ 0 < u \le L_n\,. \tag{1.81}$$

მაშინ (1.81) შეფასებიდან გამომდინარე სამართლიანია შემდეგი

$$|D_2| \le \frac{1}{L_n}\int_{1/q(n)}^{\delta} |\varphi(x,u)| \frac{2L_n}{\pi u} du = \frac{2}{\pi}\int_{1/q(n)}^{\delta} \frac{|\varphi(x,u)|}{u} du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{1/q(n)}^{\delta} \frac{1}{u}\, d\int_0^u |\varphi(x,t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{u}\int_0^u |\varphi(x,t)|\,dt\Bigg|_{1/q(n)}^{\delta} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{1/q(n)}^{\delta}\frac{1}{u^2}\int\limits_0^u|\varphi(x,t)|\,dtdu=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}\int\limits_0^{\delta}|\varphi(x,t)|\,dt-$$

$$-\frac{2q(n)}{\pi}\int\limits_0^{1/q(n)}|\varphi(x,t)|\,dt+\frac{2}{\pi}\int\limits_{1/q(n)}^{\delta}\frac{1}{u^2}\int\limits_0^u|\varphi(x,t)|\,dtdu\le$$

$$\le\frac{2\varepsilon}{\pi}\left(2+\int\limits_{1/q(n)}^{\delta}\frac{du}{u}\right)=\frac{2\varepsilon}{\pi}(2+\ln\delta-\ln 1+\ln q(n)))=o(\ln q(n))\,. \tag{1.82}$$

ამასთან (1.15) და (1.81)-ის ძალით გვექნება

$$|D_3|\le\frac{1}{L_n}\int\limits_{\delta}^{L_n}|\varphi(x,u)|\frac{2L_n}{\pi u}du=\frac{2}{\pi}\int\limits_{\delta}^{L_n}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{\delta}^{1}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du+\frac{2}{\pi}\int\limits_{1}^{L_n}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du\le\frac{2}{\pi\delta}\int\limits_{\delta}^{1}|\varphi(x,u)|\,du+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{1}^{L_n}\frac{|\varphi(x,u)|}{u}du=O(1)+o(\ln q(n))\,. \tag{1.83}$$

(1.78)-(1.83)-დან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{C_1}{\ln q(n)}=0\,. \tag{1.84}$$

განვიხილოთ C_2.

$$C_2=-\frac{d_x(f)}{L_n}\int\limits_0^{L_n}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du=$$

$$=-\frac{d_x(f)}{L_n}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\int\limits_0^{L_n}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du=-\frac{d_x(f)}{L_n}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}U_k^{L_n}\,,$$

სადაც

$$U_k^{L_n}\equiv\int\limits_0^{L_n}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du\,.$$

(1.41)-ის ძალით ყოველი $\varepsilon>0$-თვის არსებობს ისეთი $N=N(\varepsilon)$, რომ ყოველი $k\ge N$, გვაქვს (1.71). განვიხილოთ

$$\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}U_k^{L_n}=\sum_{k=0}^{N}a_{nk}U_k^{L_n}+\sum_{k=N+1}^{q(n)}a_{nk}U_k^{L_n}\le$$

$$\le F_1(N)\sum_{k=0}^{N}a_{nk}+(1+\varepsilon)\ln q(n)\sum_{k=N+1}^{q(n)}a_{nk}\le$$

$$\le F_1(N)A_n+(1+\varepsilon)\ln q(n)A_n\,,$$

სადაც

$$F_1(N)=\max_{1\le k\le N}|U_k^{L_n}|\,.$$

საბოლოოდ მატრიცის რეგულარობის ძალით მივიღებთ

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{-\pi D_2}{d_x(f)\ln q(n)}\le 1\,. \tag{1.85}$$

რაც (1.73)-(1.84)-თან ერთად ამტკიცებს (1.16)-ს და მასთან ერთად (i) ა)-ს.

(i) ბ) ავირჩიოთ ნებისმიერი $\beta\in[0;1]$. შევადგინოთ მიმდევრობა $\beta(n)\to\beta$ ისე, რომ $q^{\beta(n)}(n)\to+\infty$, $n\to+\infty$. ავაგოთ (a_{nk}) მატრიცი შემდეგნაირად

$$a_{nk}=\begin{cases}1, & \text{თუ } k=[q^{\beta(n)}(n)],\\ 0, & \text{თუ } k\neq[q^{\beta(n)}(n)].\end{cases}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (a_{nk}) მატრიცი რეგულარულია.

ცხადია (1.73)-(1.84) შეფასებები ამ შემთხვევაშიც ძალაში დარჩება ვინაიდან აღნიშნული შეფასებები მიღებული იყო ნებისმიერი დადებითი რეგულარული მატრიცებისთვის, ჩვენს მიერ აგებული მატრიცი ცხადია რეგულარულია და დადებითი.

ამგვარად შესაფასებელი დარჩა C_2 წევრი. (1.71)-ის ძალით გვაქვს:

$$\frac{1}{\ln q(n)}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}U_k^{L_n}=\frac{U^{L_n}_{\left[q^{\beta(n)}(n)\right]}}{\ln q(n)}\le\frac{(1+\varepsilon)\cdot L_n\cdot\ln\left[q^{\beta(n)}(n)\right]}{\pi\cdot\ln q(n)}\le$$
$$\le\frac{(1+\varepsilon)\cdot L_n\cdot\ln q^{\beta(n)}(n)}{\pi\cdot\ln q(n)}\le\frac{(1+\varepsilon)\cdot L_n\cdot\beta(n)}{\pi},$$

ე. ი.

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\pi}{L_n\cdot\ln q(n)}\int_0^{L_n}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(t)dt\le\beta.$$

მეორე მხრივ,

$$\frac{1}{\ln q(n)}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}U_k^{L_n}=\frac{U^{L_n}_{\left[q^{\beta(n)}(n)\right]}}{\ln q(n)}\ge\frac{(1-\varepsilon)\cdot L_n\cdot\ln\left[q^{\beta(n)}(n)\right]}{\pi\cdot\ln q(n)}\ge$$
$$\ge\frac{(1-\varepsilon)\cdot L_n\cdot\ln(q^{\beta(n)}(n)/2)}{\pi\cdot\ln q(n)}=\frac{(1-\varepsilon)\cdot L_n\cdot\beta(n)}{\pi}-\frac{(1-\varepsilon)\cdot L_n\cdot\ln 2}{\pi\cdot\ln q(n)}.$$

ვინაიდან $\lim\limits_{n\to+\infty}q(n)=+\infty$, ამიტომ

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\pi}{L_n\cdot\ln q(n)}\int_0^{L_n}\sum_{k=0}^{q(n)}a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(t)dt\ge\beta,$$

ე. ი. საბოლოოდ გვექნება

(1.86) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{C_2}{\ln q(n)}=-\frac{\beta\cdot d_x(f)}{\pi},$$

(1.73)-(1.84) შეფასებები უკანასკნელთან ერთად ერთად ამტკიცებს (1.17)-ს და მასთან ერთად ასრულებს თეორემა 1.2.3-ის (i) ნაწილის მტკიცებას.

დავამტკიცოთ (ii).

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $q(n)=n$. ფუნქცია განვსაზღვროთ (1.43) ფორმულით. დავუშვათ $L_n=\sqrt{n}$. f_0 ფუნქციისთვის და L_n მიმდევრობისთვის 0-წერტილში სრულდება (1.6) და (1.18), რასაც ამტკიცებს (1.44) და (1.45) შეფასებები.

განვიხილოთ $\beta\in[0;1]$ და მისი შესაბამისი დადებითი, რეგულარული სამკუთხა მატრიცი. ვინაიდან მატრიცი დადებითია და რეგულარულიც ვასკვნით, რომ (1.43)-ით განსაზღვრული ფუნქციისთვის (1.75)-(1.82) შეფასებები ძალაში დარჩება. ამიტომ შესაფასებელი რჩება (1.78) წარმოდგენიდან D_3 შესაკრები. რადგან $\varphi(0,u)=0$, როცა $u\in(0;1)$ გვაქვს

$$D_3=\frac{1}{L_n}\int_1^{L_n}\varphi(0,u)\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\tilde{D}_k^{L_n}(u)du=$$

$$=\frac{1}{L_n}\int_1^{L_n}\varphi(0,u)\sum_{k=0}^n a_{nk}\tilde{D}_k^{*L_n}(u)du+\frac{1}{2L_n}\int_1^{L_n}\varphi(0,u)\sum_{k=0}^n a_{nk}\sin(\pi ku/L_n)du=E_1+E_2\,.$$

შევაფასოთ E_2. ვიცით, რომ $-8\le\varphi(0,u)\le 0$

$$|E_2|\le\frac{1}{2L_n}\int_1^{L_n}|\varphi(0,u)|\sum_{k=0}^n a_{nk}|\sin(\pi ku/L_n)|du\le$$

$$\le\frac{A_n}{2L_n}\int_1^{L_n}|\varphi(0,u)|du\le\frac{A_n}{2L_n}\int_1^{L_n}8du\le 4A_n\,.$$

განვიხილოთ E_1. (1.49)-ის ძალით გვაქვს

$$E_1=\frac{1}{L_n}\int_1^{L_n}\varphi(0,u)\sum_{k=0}^n a_{nk}\frac{1-\cos(\pi ku/L_n)}{2\tan(\pi u/2L_n)}du\,.$$

შევაფასოთ $|E_1|$ ზემოდან

$$|E_1|=\frac{1}{L_n}\int_1^{L_n}|\varphi(0,u)|\sum_{k=0}^n a_{nk}\frac{1-\cos(\pi ku/L_n)}{2\tan(\pi u/2L_n)}du\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_1^{L_n}\frac{|\varphi(0,u)|}{u}\sum_{k=0}^n a_{nk}(1-\cos(\pi ku/L_n))du$$

ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება

$$\frac{1}{\pi}\int_1^{L_n}\frac{1}{u}d\int_0^u|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^n a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))ds=$$

$$=\frac{1}{\pi L_n}\int_0^{L_n}|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^n a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))ds-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^n a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_1^2\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^n a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))dsdu+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_2^{L_n}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^n a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))dsdu=F_1-F_2+F_3+F_4\,.$$

გვაქვს

$$F_1\le\frac{2A_n}{\pi L_n}\int_0^{L_n}|\varphi(0,s)|ds\le\frac{2A_n}{\pi L_n}\int_0^{L_n}8ds=\frac{16A_n}{\pi}\,.$$

ვინაიდან $\varphi(0,u)=0$, როცა $u\in(0;1)$ გვაქვს

$$F_2=\frac{1}{\pi}\int_0^1|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^n a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))ds=0\,,$$

$$F_3\le\frac{2A_n}{\pi}\int_1^2\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|dsdu\le\frac{16A_n}{\pi}\int_1^2\frac{1}{u^2}du\le\frac{16A_n}{\pi}\,.$$

$$F_4=\frac{A_n}{\pi}\int_2^{L_n}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|dsdu-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_2^{L_n}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^n a_{nk}\cos(\pi ks/L_n)dsdu=G_1-G_2\,.$$

განვიხილოთ G_2. ადვილი დასანახია, რომ G_2 წარმოადგენს (1.52) წარმოდგენიდან H_2-შესაკრების წრფივ საშუალოს, ამიტომ მატრიცის რეგულარობიდან გამომდინარე G_2 შესაკრებისთვისაც მივიღებთ ანალოგიურ შეფასებას $G_2 = o(\ln n)$. (1.45) შეფასების მსგავსად გვაქვს

$$G_1 = \frac{A_n}{\pi}\int_2^{L_n}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\,dsdu \simeq \frac{4A_n}{\pi}\ln L_n = \frac{2A_n}{\pi}\ln n .$$

საბოლოოდ

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{|D_3|}{\ln n}\le\frac{2}{\pi}.$$

მეორე მხრივ, განვიხილოთ $|E_1|$-ის შეფასება ქვემოდან.

$$|E_1| = \frac{1}{L_n}\int_1^{L_n}|\varphi(0,u)|\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\frac{1-\cos(\pi ku/L_n)}{2\tan(\pi u/2L_n)}du \ge$$

$$\ge\frac{1}{L_n}\int_1^{L_n/\ln L_n}|\varphi(0,u)|\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\frac{1-\cos(\pi ku/L_n)}{2\tan(\pi u/2L_n)}du \ge$$

$$\ge\frac{\cos(\pi/2\ln L_n)}{2L_n}\int_1^{L_n/\ln L_n}\frac{|\varphi(0,u)|}{\sin(\pi u/2L_n)}\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(1-\cos(\pi ku/L_n))du \ge$$

$$\ge\frac{\cos(\pi/2\ln L_n)}{\pi}\int_1^{L_n/\ln L_n}\frac{|\varphi(0,u)|}{u}\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(1-\cos(\pi ku/L_n))du$$

ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება

$$\int_1^{L_n/\ln L_n}\frac{1}{u}d\int_0^u|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))ds =$$

$$=\frac{\ln L_n}{L_n}\int_0^{L_n/\ln L_n}|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))ds -$$

$$-\int_0^1|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))ds +$$

$$+\int_1^2\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))dsdu +$$

$$+\int_2^{L_n/\ln L_n}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))dsdu = I_1 - I_2 + I_3 + I_4$$

გვაქვს

$$I_1 \le \frac{2A_n\ln L_n}{L_n}\int_0^{L_n/\ln L_n}|\varphi(0,s)|\,ds \le \frac{2A_n\ln L_n}{L_n}\int_0^{L_n/\ln L_n}8ds = 2A_n .$$

ვინაიდან $\varphi(0,u)=0$, როცა $u\in(0;1)$ გვაქვს

$$I_2 = \int_0^1|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(1-\cos(\pi ks/L_n))ds = 0 .$$

$$I_3 \le 2A_n\int_1^2\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\,dsdu \le 16A_n\int_1^2\frac{1}{u^2}du \le 16A_n .$$

$$I_4 = A_n\int_2^{L_n/\ln L_n}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\,dsdu -$$

$$-\int_{2}^{L_n/\ln L_n}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\cos(\pi ks/L_n)dsdu=J_1-J_2 .$$

J_2 შესაკრები შეფასდება G_2-ის ანალოგიურად. ანუ $J_2=o(\ln n)$. (1.45) შეფასების მსგავსად გვექნება

$$J_1=A_n\int_{2}^{L_n/\ln L_n}\frac{1}{u^2}\int_0^u|\varphi(0,s)|\,dsdu\simeq 4A_n\ln(L_n/\ln L_n)=$$

$$=4A_n(\ln L_n-\ln\ln L_n)=2A_n\ln n+o(\ln n) .$$

ბოლო შეფასებაზე დაყრდნობით დავასკვნით, რომ

$$|E_1|\geq\frac{2A_n\cos(\pi/2\ln L_n)}{\pi}\ln n+o(\ln n) .$$

საბოლოოდ

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\frac{|D_3|}{\ln n}\geq\frac{2}{\pi} .$$

$|D_3|$-ის მიღებული შეფასებებიდან და იმ ფაქტიდან, რომ $D_3<0$ გვაქვს

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{D_3}{\ln n}=-\frac{2}{\pi} .$$

რადგან მატრიცი დადებითი და რეგულარულია ამიტომ სამართლიანია (1.73)-(1.82). აგრეთვე ძალაშია (1.86) შეფასებაც, რომლის ძალით გვაქვს

(1.87) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{-\pi}{4}\frac{C_2}{\ln n}=\beta .$$

უკანასკნელი შეფასებებიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{d_0(f)}\cdot\frac{\sigma_{q(n)}^{L_n}(f_0;0)}{\ln n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{4}\cdot\frac{C_1+C_2}{\ln n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{-\pi}{4}\frac{C_1}{\ln n}+\beta\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\pi}{4}\frac{D_1+D_2+D_3}{\ln n}+\beta\right|=\left|\beta-\frac{1}{2}\right| .$$

თეორემა 1.2.3 დამტკიცებულია.

თეორემა 1.2.4-ის დამტკიცება.

განვიხილოთ $\tilde{f}^{L(r)}(r,x)$,

$$\tilde{f}^{L(r)}(r,x)\equiv\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-i\operatorname{sig}k)\,\widehat{f}(k)e^{i\pi kx/L(r)}r^{|k|}=$$

$$=-\frac{1}{L(r)}\int_{-L(r)}^{L(r)}f(t)Q_{L(r)}(r,t-x)dt ,$$

სადაც $Q_{L(r)}(r,t)$ განსაზღვრულია (1.20) ტოლობით ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით $u=t-x$ მივიღებთ

$$\tilde{f}^{L(r)}(r,x)=-\frac{1}{L(r)}\int_{-L(r)-x}^{L(r)-x}f(x+u)Q_{L(r)}(r,u)du .$$

მეორე მხრივ, თუ ცვლადს შევცვლით: $-u=t-x$ და გავითვალისწინებთ, რომ $Q_{L(r)}(r,t)$ კენტი ფუნქციაა t-ს მიმართ, მივიღებთ

$$\tilde{f}^{L(r)}(r,x)=\frac{1}{L(r)}\int_{-L(r)+x}^{L(r)+x} f(x-u)Q_{L(r)}(r,u)du\ .$$

საბოლოოდ ინტეგრალის ადიციურობის ძალით გვექნება

$$\tilde{f}^{L(r)}(r,x)=-\frac{1}{2L(r)}\int_{-L(r)-x}^{L(r)-x} f(x+u)Q_{L(r)}(r,u)du+$$

$$+\frac{1}{2L(r)}\int_{-L(r)+x}^{L(r)+x} f(x-u)Q_{L(r)}(r,u)du=$$

$$=-\frac{1}{2L(r)}\int_{-L(r)+x}^{L(r)-x}(f(x+u)-f(x-u))Q_{L(r)}(r,u)du-$$

$$-\frac{1}{2L(r)}\int_{-L(r)-x}^{-L(r)+x} f(x+u)Q_{L(r)}(r,u)du+$$

(1.88) $$+\frac{1}{2L(r)}\int_{L(r)-x}^{L(r)+x} f(x-u)Q_{L(r)}(r,u)du=A_1+A_2+A_3\,.$$

განვიხილოთ A_1. ვინაიდან $f(x+u)-f(x-u)$ და $Q_{L(r)}(r,u)$ u-ს მიმართ კენტი ფუნქციებია, ამიტომ გვექნება

$$A_1=-\frac{1}{2L(r)}\int_{-L(r)+x}^{L(r)-x}(f(x+u)-f(x-u))Q_{L(r)}(r,u)du=$$

$$=-\frac{1}{L(r)}\int_{0}^{L(r)-x}(f(x+u)-f(x-u))Q_{L(r)}(r,u)du=$$

$$=-\frac{1}{L(r)}\int_{0}^{L(r)}(f(x+u)-f(x-u))Q_{L(r)}(r,u)du+$$

(1.89) $$+\frac{1}{L(r)}\int_{L(r)-x}^{L(r)}(f(x+u)-f(x-u))Q_{L(r)}(r,u)du=B_1+B_2\,.$$

$Q(r,u)$-ის წარმოდგენიდან (იხ. [21], თავი III, (6.3)) ცვლადის შეცვლით და მარტივი შეფასებით მივიღებთ

(1.90) $$|Q_{L(r)}(r,t)|\le\frac{1}{2\sin(\pi t/2L(r))}\,.$$

განვიხილოთ B_2. მაშინ (1.90) ის ძალით ადვილი დასანხია, რომ ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით და (1.8)-ის გამოყენებით გვექნება

$$B_2\le\frac{1}{L(r)}\int_{L(r)-x}^{L(r)}|f(x+u)-f(x-u)|\cdot|Q_{L(r)}(r,u)|\,du\le$$

$$\le\frac{1}{2L(r)\sin[\pi(L(r)-x)/2L(r)]}\int_{L(r)-x}^{L(r)}|f(x+u)-f(x-u)|\,du\le$$

$$\le\frac{1}{2L(r)\sin[\pi(L(r)-x)/2L(r)]}\int_{L(r)-x}^{L(r)}\big(|f(x+u)|+|f(x-u)|\big)du=$$

(1.91) $$=\frac{1}{2L(r)\sin[\pi(L(r)-x)/2L(r)]}\left(\int_{L(r)}^{L(r)+x}|f(t)|\,dt+\int_{-L(r)+2x}^{-L(r)+x}|f(t)|\,dt\right)=O(1)\,.$$

განვიხილოთ A_2, A_3. B_2-ის მსგავსად ადვილი დასანხია, რომ ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით და (1.8), (1.90) თანაფარდობების გამოყენებით მივიღებთ შეფასებებს:

$$|A_2| \le \frac{1}{2L(r)\sin[\pi(L(r)-x)/2L(r)]} \int_{-L(r)-x}^{-L(r)+x} |f(x+u)|\,du =$$

(1.92) $$= \frac{1}{2L(r)\sin[\pi(L(r)-x)/2L(r)]} \int_{-L(r)}^{-L(r)+2x} |f(t)|\,dt = O(1),$$

და

$$|A_3| \le \frac{1}{2L(r)\sin[\pi(L(r)-x)/2L(r)]} \int_{L(r)-x}^{L(r)+x} |f(x-u)|\,du =$$

(1.93) $$= \frac{1}{2L(r)\sin[\pi(L(r)-x)/2L(r)]} \int_{-L(r)+2x}^{-L(r)} |f(t)|\,dt = O(1).$$

განვიხილოთ B_1:

$$B_1 = -\frac{1}{L(r)} \int_0^{L(r)} (f(x+u) - f(x-u) - d_x(f)) Q_{L(r)}(r,u)\,du -$$

(1.94) $$-\frac{d_x(f)}{L(r)} \int_0^{L(r)} Q_{L(r)}(r,u)\,du = C_1 + C_2.$$

შევაფასოთ C_2. $Q(r,u)$ წარმოდგენიდან (იხ. [21], თავი III, (6.3)) და ცვლადის $t = \pi u / L(r)$ გარდაქმნით გვექნება

$$C_2 = -\frac{d_x(f)}{L(r)} \int_0^{L(r)} \frac{r\sin(\pi u/L(r))}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(\pi u/2L(r))}\,du =$$

$$= -\frac{d_x(f)}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{r\sin t}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(t/2)}\,dt.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\left(\frac{\ln((1-r)^2 + 4\sin^2(t/2))}{2} \right)' = \frac{r\sin t}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(t/2)}.$$

ამგვარად, გვაქვს

$$C_2 = -\frac{d_x(f)}{\pi} \left(\frac{\ln((1-r)^2 + 4r\sin^2(t/2))}{2} \right)_0^{L(r)} =$$

$$= -\frac{d_x(f)}{2\pi} \ln((1-r)^2 + 4r\sin^2(\pi/2)) +$$

$$+ \frac{d_x(f)}{2\pi} \ln((1-r)^2 + 4r\sin^2 0) =$$

$$= -\frac{d_x(f)}{2\pi} \ln(1 - 2r + r^2 + 4r) + \frac{d_x(f)}{2\pi} \ln(1-r)^2 =$$

(1.95) $$= \frac{d_x(f)}{\pi} \left(\ln(1-r) - \ln(1+r) \right) \simeq \frac{d_x(f)}{\pi} \ln(1-r).$$

როცა $r \to 1-$.

შევაფასოთ C_1. (1.6)-ის ძალით ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის, მო-

ძებნება დადებითი რიცხვი (საზოგადოდ დამოკიდებული ε-ზე) $\delta=\delta(\varepsilon)$ ისეთი, რომ ადგილი ექნება (1.33). უკანასკნელის გათვალისწინებით განვიხილოთ წარმოდგენა

$$C_1=-\frac{1}{L(r)}\int_0^{\delta}\varphi(x,u)Q_{L(r)}(r,u)u-$$

$$-\frac{1}{L(r)}\int_{\delta}^{L(r)}\varphi(x,u)Q_{L(r)}(r,u)du=-D_1-D_2\,. \tag{1.96}$$

შევაფასოთ D_1. u-ს მიმართ ნაწილობითი ინტეგრებით და შეფასებით $0\le Q_{L(r)}(r,u)$, $u\in[0;L(r)]$, გვექნება

$$D_1=\frac{1}{L(r)}\int_0^{\delta}\varphi(x,u)Q_{L(r)}(r,u)du=$$

$$=\frac{1}{L(r)}\int_0^{\delta}Q_{L(r)}(r,u)d\int_0^{u}\varphi(x,s)ds=$$

$$=\frac{1}{L(r)}Q_{L(r)}(r,u)\int_0^{u}\varphi(x,s)ds\Big|_0^{\delta}-\frac{1}{L(r)}\int_0^{\delta}Q'_{L(r)}(r,u)\int_0^{u}\varphi(x,s)dsdu=$$

$$=\frac{1}{L(r)}Q_{L(r)}(r,\delta)\int_0^{\delta}\varphi(x,u)du-\frac{1}{L(r)}\int_0^{\delta}Q'_{L(r)}(r,u)\int_0^{u}\varphi(x,s)dsdu=E_1-E_2\,. \tag{1.97}$$

(1.33) და (1.90)-ის ძალით

$$E_1\le\frac{1}{L(r)}Q_{L(r)}(r,\delta)\int_0^{\delta}|\varphi(x,s)|\,ds\le$$

$$\le\frac{1}{2L(r)\sin(\pi\delta/2L(r))}\int_0^{\delta}|\varphi(x,s)|\,ds\le\frac{2}{\pi\delta}\int_0^{\delta}|\varphi(x,s)|\,ds<\frac{2\varepsilon}{\pi}\,. \tag{1.98}$$

დავუშვათ γ ისეთი წერტილია სადაც $Q'_{L(r)}(r,u)$ იცვლის ნიშანს, ცხადია, რომ ის ნიშანს ერთხელ შეიცვლის $[0;L(r)]$-შუალედში. ამიტომ ინტეგრალის მონოტონობისა და (1.33)-ის გამო

$$|E_2|\le\frac{1}{L(r)}\int_0^{\delta}|Q'_{L(r)}(r,u)|\int_0^{u}|\varphi(x,s)|\,dsdu\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{L(r)}\int_0^{\delta}|Q'_{L(r)}(r,u)|\,udu=\frac{\varepsilon}{L(r)}\int_0^{\gamma}Q'_{L(r)}(r,u)udu-$$

$$-\frac{\varepsilon}{L(r)}\int_{\gamma}^{\delta}Q'_{L(r)}(r,u)udu=F_1-F_2\,. \tag{1.99}$$

ნაწილობითი ინტეგრებით u-მიმართ, (1.90) და (1.95)-ს ძალით მივიღებთ

$$F_1=\frac{\varepsilon}{L(r)}\int_0^{\gamma}Q'_{L(r)}(r,u)udu=\frac{\varepsilon\gamma}{L(r)}Q_{L(r)}(r,\gamma)-$$

$$-\frac{\varepsilon}{L(r)}\int_0^{\gamma}Q_{L(r)}(r,u)du\le\frac{\varepsilon\gamma}{L(r)}Q_{L(r)}(r,\gamma)+\frac{\varepsilon}{L(r)}\int_0^{\gamma}Q_{L(r)}(r,u)du\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2\pi}+\frac{\varepsilon}{L(r)}\int_0^{L(r)}Q_{L(r)}(r,t)dt=o(\ln(1-r))\,. \tag{1.100}$$

ანალოგიური მსჯელობით F_2-თვის გვექნება

$$F_2 \le \frac{\varepsilon\delta}{L(r)} Q_{L(r)}(r,\delta) + \frac{\varepsilon\gamma}{L(r)} Q_{L(r)}(r,\gamma) +$$

(1.101) $$+\frac{\varepsilon}{L(r)}\int_\gamma^\delta Q_{L(r)}(r,u)du \le o(1) + \frac{\varepsilon}{L(r)}\int_0^{L(r)} Q_{L(r)}(r,u)du = o(\ln(1-r)) .$$

განვიხილოთ D_2, (1.90) და (1.22)-ის ძალით მივიღებთ

$$|D_2| \le \frac{1}{L(r)}\int_\delta^{L(r)} |\varphi(x,u)||Q_{L(r)}(r,u)|du \le$$

$$\le \frac{1}{L(r)}\int_\delta^{L(r)} \frac{|\varphi(x,u)|}{2\sin(\pi u/2L(r))}du \le \frac{2}{\pi}\int_\delta^{L(r)} \frac{|\varphi(x,u)|}{u}du = o(\ln(1-r)) .$$

უკანასკნელი შეფასების და (1.96)-(1.101) ძალით გვექნება

$$\lim_{r\to 1-} \frac{C_1}{\ln(1-r)} = 0 .$$

საბოლოოდ, (1.95) და ბოლო თანაფარდობა ამტკიცებს თეორემა 1.2.4-ის (i) ნაწილს.

(ii) განვიხილოთ (1.43) ფორმულით განსაზღვრული ფუნქცია, ვთქვათ $L(r) = (1-r)^{-4}$. ფაქტი, რომ აღნიშნული ფუნქციებისათვის სრულდება (1.6) და (1.24), გამომდინარეობს (1.44) და (1.45)-დან. გვაქვს

$$\int_1^{L(r)} \frac{|\varphi(0,u)|}{u}du \simeq 4\ln L(r) = -\ln(1-r) .$$

განვიხილოთ $\tilde{f}^{L(r)}(r,0)$. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში სამართლიანია (1.88)-(1.101) წარმოდგენები და შეფასებები. შესაფასებელი რჩება D_2 შესაკრები (1.96)-წარმოდგენიდან.

$$D_2 = \frac{1}{L(r)}\int_\delta^{L(r)} \varphi(0,u)Q_{L(r)}(r,u)du = \frac{1}{L(r)}\int_\delta^2 \varphi(0,u)Q_{L(r)}(r,u)du +$$

(1.102) $$+\frac{1}{L(r)}\int_2^{L(r)} \varphi(0,u)Q_{L(r)}(r,u)du = G_1 + G_2 .$$

ვინაიდან $\varphi(0,u) \le 0$ ყველა u-თვის, მაშინ $Q_{L(r)}(r,u)$-ს წარმოდგენიდან (იხ. [21], თავი III, (6.3)) მარტივი შეფასებით მივიღებთ

$$|G_1| \le \frac{1}{L(r)}\int_\delta^2 \frac{|\varphi(0,u)|}{2\tan(\pi u/2L(r))}du \le \frac{1}{\pi}\int_\delta^2 \frac{|\varphi(0,u)|}{u}du \le \frac{8}{\pi\delta} = O(1) .$$

ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება

$$G_2 = \frac{1}{L(r)}\int_2^{L(r)} Q_{L(r)}(r,u)d\int_0^u \varphi(0,s)ds =$$

$$= \frac{1}{L(r)} Q_{L(r)}(r,L(r))\int_0^{L(r)} \varphi(0,s)ds - \frac{1}{L(r)} Q_{L(r)}(r,2)\int_0^2 \varphi(0,s)ds -$$

(1.103) $$-\frac{1}{L(r)}\int_2^{L(r)} Q'_{L(r)}(r,u)\int_0^u \varphi(0,s)dsdu = H_1 - H_2 - H_3 .$$

განვიხილოთ H_1 და H_2:

$$H_1 = \frac{1}{L(r)} Q_{L(r)}(r, L(r)) \int\limits_0^{L(r)} \varphi(0,u)du = 0 \,,$$

$$H_2 = \frac{1}{L(r)} Q_{L(r)}(r,2) \int\limits_0^2 \varphi(0,u)du \le \frac{1}{L(r) 2\tan(\pi / L(r))} \le \frac{1}{\pi} \,.$$

H_3-თვის გვაქვს

$$H_3 = \frac{1}{L(r)} \int\limits_2^{L(r)} Q'_{L(r)}(r,u) \int\limits_0^u \varphi(0,s)dsdu =$$

$$= \frac{1}{L(r)} \int\limits_2^{L(r)} Q'_{L(r)}(r,u) \left(\sum_{k=1}^{[u/2]} \int\limits_{2k-2}^{2k} \varphi(0,s)ds + \int\limits_{2[u/2]}^{u} \varphi(0,s)ds \right) du =$$

$$= \frac{1}{L(r)} \int\limits_2^{L(r)} Q'_{L(r)}(r,u) \left(\sum_{k=1}^{[u/2]} \int\limits_0^2 \varphi(0,s)ds + O(1) \right) du =$$

$$= \frac{1}{L(r)} \int\limits_2^{L(r)} Q'_{L(r)}(r,u) \left(-8 \cdot \left[\frac{u}{2} \right] + O(1) \right) du =$$

$$= \frac{-4}{L(r)} \int\limits_2^{L(r)} Q'_{L(r)}(r,u)(u - (u - 2[u/2]) + O(1))du =$$

$$= \frac{-4}{L(r)} \int\limits_2^{L(r)} Q'_{L(r)}(r,u)(u + O(1))du =$$

(1.104) $$= \frac{-4}{L(r)} \int\limits_2^{L(r)} u \cdot Q'_{L(r)}(r,u)du + \frac{O(1)}{L(r)} \int\limits_2^{L(r)} Q'_{L(r)}(r,u)du = J_1 + J_2 \,.$$

შევაფასოთ J_2. დავუშვათ γ ისეთი წერტილია სადაც, $Q'_{L(r)}(r,t)$ იცვლის ნიშანს. ცხადია, რომ ის ნიშანს ერთხელ შეიცვლის $[0; L(r)]$-შუალედში, ამიტომ გვექნება

$$J_2 = \frac{O(1)}{L(r)} \int\limits_2^{L(r)} | Q'_{L(r)}(r,u) | du =$$

$$= \frac{O(1)}{L(r)} \left(\int\limits_2^{\gamma} Q'_{L(r)}(r,u)du - \int\limits_{\gamma}^{L(r)} Q'_{L(r)}(r,u)du \right) =$$

$$= \frac{O(1)}{L(r)} \left(Q_{L(r)}(r,u) \Big|_2^{\gamma} - Q_{L(r)}(r,u) \Big|_{\gamma}^{L(r)} \right) =$$

$$= \frac{O(1)}{L(r)} \left(Q_{L(r)}(r,\gamma) - Q_{L(r)}(r,2) - Q_{L(r)}(r, L(r)) + Q_{L(r)}(r,\gamma) \right) =$$

$$= \frac{O(1)}{L(r)} \left(2Q_{L(r)}(r,\gamma) - Q_{L(r)}(r,2) \right) .$$

$L(r)$ ფუნქციის განსაზღვრით, $Q_{L(r)}(r,t)$-ის და $\sin x = x + o(x)$, $x \to 0$, წარმოდგენებიდან გვაქვს

$$\frac{Q_{L(r)}(r,\gamma)}{L(r)} = \frac{1}{(1-r)^{-1}} \frac{r \sin(\pi\gamma(1-r))}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(\pi\gamma(1-r)/2)} =$$

$$= (1-r) \frac{r\pi\gamma(1-r) + o(1-r)}{(1-r)^2 + 4r\pi^2\gamma^2(1-r)^2 + o((1-r)^2)} = O(1) \,.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $Q_{L(r)}(r,2)/L(r)=O(1)$, საიდანაც საბოლოოდ დავასკვნით, რომ $J_2=O(1)$.

განვიხილოთ J_1, ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება

$$J_1=\frac{-4}{L(r)}\int_2^{L(r)} u\cdot Q'_{L(r)}(r,u)du=\frac{-4}{L(r)}Q_{L(r)}(r,L(r))L(r)+$$

$$+\frac{1}{L(r)}Q_{L(r)}(r,2)+\frac{4}{L(r)}\int_2^{L(r)} Q_{L(r)}(r,u)du=O(1)+\frac{4}{L(r)}\int_2^{L(r)} Q_{L(r)}(r,u)du .$$

ინტეგრალში ცვლადის $t=\pi u/L(r)$ შეცვლით მივიღებთ

$$\frac{4}{L(r)}\int_2^{L(r)} Q_{L(r)}(r,u)du=\frac{4}{\pi}\int_{2\pi/L(r)}^{\pi} Q(r,t)dt .$$

განვიხილოთ

$$\int_{2\pi/L(r)}^{\pi} Q(r,t)dt=\frac{(\ln((1-r)^2+4r\sin^2(t/2)))\Big|_{2\pi/L(r)}^{\pi}}{2}=$$

$$=\frac{\ln((1-r)^2+4r)}{2}-\frac{1}{2}\ln((1-r)^2+4r\sin^2(\pi/L(r)))=$$

$$=\frac{\ln(1+r)^2}{2}-\frac{1}{2}\ln((1-r)^2+4r\sin^2(\pi(1-r))) .$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{r\to1-}\frac{\ln((1-r)^2+4r\sin^2(\pi(1-r)))}{\ln(1-r)}=2 .$$

შევაფასოთ ქვემოდან

$$\frac{\ln((1-r)^2+4r\sin^2(\pi(1-r)))}{\ln(1-r)}\ge\frac{\ln(1-r)^2}{\ln(1-r)}=2 ,$$

მეორე მხრივ, $\sin x=x+o(x)$, $x\to0$,

$$\frac{\ln((1-r)^2+4r\sin^2(\pi(1-r)))}{\ln(1-r)}=\frac{\ln((1-r)^2+4r(\pi(1-r)+o(1-r))^2)}{\ln(1-r)}=$$

$$=\frac{\ln((1-r)^2+4r\pi^2(1-r)^2+o((1-r)^2))}{\ln(1-r)}\le$$

$$\le\frac{\ln(6r\pi^2(1-r)^2)}{\ln(1-r)}=\frac{\ln 6r\pi^2+\ln(1-r)^2}{\ln(1-r)}=2+\frac{\ln 6r\pi^2}{\ln(1-r)} .$$

მივიღეთ, რომ

$$\lim_{r\to1-}\frac{C_1}{\ln(1-r)}=\lim_{r\to1-}\frac{-D_1-D_2}{\ln(1-r)}=\lim_{r\to1-}\frac{-G_1-G_2}{\ln(1-r)}=$$

$$=\lim_{r\to1-}\frac{-H_1+H_2+H_3}{\ln(1-r)}=\lim_{r\to1-}\frac{J_1+J_2}{\ln(1-r)}=-\frac{4}{\pi} .$$

საბოლოოდ ვინაიდან $d_0(f_0)=4$ მივიღებთ

$$\lim_{r\to1-}\left(\frac{\pi}{d_0(f)}\cdot\frac{\tilde f^{L(r)}(r,x)}{\ln(1-r)}\right)=\lim_{r\to1-}\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{C_1+C_2}{\ln(1-r)}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\right)=0\ne1 .$$

ეს კი ამტკიცებს თეორემა 1.2.4-ის (*ii*) ნაწილს, რითაც სრულდება თეორემის მტკიცება.

თავი II

ორი ცვლადის ფუნქციების ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივები

2.1. აუცილებელი აღნიშვნები, განსაზღვრებები და ძირითადი თეორემები ორი ცვლადის პერიოდული ფუნქციებისათვის

დავუშვათ f არის ორი ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია, 2π პერიოდული თითოეული ცვლადის მიმართ და ლებეგის აზრით ინტეგრებადი. ამ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივს აქვს სახე

(2.1)
$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}(j,k)e^{i\pi(jx+ky)},$$

სადაც

$$\hat{f}(j,k)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)e^{-i\pi(ju+kv)}dudv$$

არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი. (2.1) მწკრივის შეუღლებულ ტრიგონომეტრიულ მწკრივს აქვს სახე

(2.2)
$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} (-i\operatorname{sign} j)(-i\operatorname{sign} k)\hat{f}(j,k)e^{i\pi(jx+ky)}.$$

დავუშვათ $\tilde{S}_{jk}(f;x,y)$ აღნიშნავს (2.2) მწკრივის მართკუთხა კერძო ჯამებს, ხოლო

$$\begin{gathered}\varphi(x,y,u,v)\equiv f(x+u,y+v)-f(x-u,y+v)-\\ -f(x+u,y-v)+f(x-u,y-v)-d_{xy}(f),\end{gathered}$$

სადაც $d_{xy}(f)$ რიცხვია და

$$\Psi(x,y,s,t)\equiv\int_0^s\int_0^t|\varphi(x,y,u,v)|\,dudv.$$

ვთქვათ $m(k)$ და $n(k)$ არის ნატურალურ რიცხვთა არაკლებადი მიმდევრობები ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to+\infty} m(k)=+\infty,\quad \lim_{k\to+\infty} n(k)=+\infty.$$

ჩვენი მიზანია განვიხილოთ ფ. ლუკაჩის თეორემის ანალოგი ორი ცვლადის ფუნქციებისათვის (იხ. თავი I, თეორემა A).

სამართლიანია

თეორემა 2.1.1. (i) ვთქვათ $f \in L(-\pi;\pi]^2$ და დავუშვათ, რომ რაიმე $(x,y) \in (-\pi;\pi]^2$ წერტილისთვის გვაქვს

(2.3) $$\lim_{s,t\to 0+} \frac{\Psi(x,y,s,t)}{st} = 0,$$

(2.4) $$\int_{1/m(k)}^{\pi} \frac{\Psi(x,y,s,\pi)}{s^2} ds = o(\ln m(k) \ln n(k)), \quad k \to +\infty,$$

და

(2.5) $$\int_{1/n(k)}^{\pi} \frac{\Psi(x,y,\pi,t)}{t^2} dt = o(\ln m(k) \ln n(k)), \quad k \to +\infty.$$

მაშინ

(2.6) $$\lim_{k\to+\infty} \frac{\tilde{S}_{m(k)n(k)}(f;x,y)}{\ln m(k) \ln n(k)} = \frac{d_{xy}(f)}{\pi^2}.$$

(ii) არსებობს $f \in L(-\pi;\pi]^2$ ფუნქცია და $m(k)$, $n(k)$ ისეთი მიმდევრობები, რომ ადგილი აქვს (2.3), (2.4) და

(2.7) $$\int_{1/n(k)}^{\pi} \frac{\Psi(x,y,\pi,t)}{t^2} dt = O(\ln m(k) \ln n(k)), \quad k \to +\infty,$$

მაგრამ არ სრულდება (2.6).

ისევე როგორც პირველ თავში, აქაც, ბუნებრივია, დაისვას საკითხი: არსებობს თუ არა თეორემა 2.1.1-ის ანალოგები ჩეზაროს განზოგადებული საშუალოებისა-თვის ან წრფივი მატრიცული საშუალოებისთვის?

შედეგის ჩამოსაყალიბებლად შემოვიღოთ რამდენიმე აღნიშვნა. ვთქვათ α_k, β_k არის მიმდევრობები $[0;b]$ შუალედიდან, სადაც b სასრული ნამდვილი რიცხვია. (2.2) მწკრივების $\tilde{S}_{jk}(f;x,y)$ მართკუთხა კერძო ჯამების ჩეზაროს განზოგადოებულ საშუალოებს აქვს სახე

$$t_{jk}^{\alpha_j,\beta_k}(f;x,y) = \frac{1}{A_j^{\alpha_j} A_k^{\beta_k}} \sum_{r=1}^{j} \sum_{s=1}^{k} A_{j-r}^{\alpha_j-1} A_{k-s}^{\beta_k-1} \tilde{S}_{rs}(f;x,y),$$

სადაც $A_j^{\alpha_j}$ განსაზღვრულია (1.5)-ით. სამართლიანია

თეორემა 2.1.2. (i) ვთქვათ $f \in L(-\pi;\pi]^2$ და დავუშვათ, რომ რაიმე $(x,y) \in (-\pi;\pi]^2$ წერტილისთვის ადგილი აქვს (2.3), (2.4) და (2.5) თანაფარდობებს, მაშინ

(2.8) $$\lim_{k\to+\infty} \frac{t_{m(k)n(k)}^{\alpha_k,\beta_k}(f;x,y)}{\ln m(k) \ln n(k)} = \frac{d_{xy}(f)}{\pi^2}.$$

(ii) არსებობს $f \in L(-\pi;\pi]^2$ ფუნქცია და $m(k)$, $n(k)$ ისეთი მიმდევრობები, რომ ადგილი აქვს (2.3), (2.4) და (2.7)-ს, მაგრამ არ არსებობს მიმდევრობები α_k და β_k რომელთათვისაც შესრულდება (2.8).

თეორემა 2.1.1-ის ანალოგი მატრიცული შეჯამებადობისთვის ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად.

ვთქვათ $p(m)$ და $q(n)$ არის ნატურალურ რიცხვთა მიდევრობები ისეთი, რომ

$$\lim_{m\to+\infty} q(m) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} q(n) = +\infty.$$

ვთქვათ (a_{mnjk}) არის დადებითი მატრიცი, დავუშვათ, რომ თუ $j > p(m)$ და $k > q(n)$, მაშინ $a_{mnjk} = 0$ და

(2.9) $$\lim_{m,n\to+\infty} A_{mn} = 1,$$

სადაც

$$A_{mn} \equiv \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{mnjk} .$$

თუ მატრიცი (a_{mnjk}) რეგულარულია, მაშინ ის აკმაყოფილებს (2.9) პირობას.

შეუღლებული ტრიგონომეტრიული ფურიეს (2.2) ორჯერადი მწკრივის მართკუთხა კერძო ჯამების წრფივ საშუალოს ექნება სახე

$$\tilde{\sigma}_{mn}(f;x,y) = \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{mnjk}\tilde{S}_{jk}(f;x,y) .$$

სამართლიანია

თეორემა 2.1.3. (i) ვთქვათ $f \in L(-\pi;\pi]^2$ და დავუშვათ, რომ რაიმე $(x,y) \in (-\pi;\pi]^2$ წერტილისთვის სრულდება (2.3),

(2.10) $$\int_{1/p(m(k))}^{\pi} \frac{\Psi(x,y,s,\pi)}{s^2} ds = o(\ln p(m(k)) \ln q(n(k))) ,\ k \to +\infty ,$$

და

(2.11) $$\int_{1/q(n(k))}^{\pi} \frac{\Psi(x,y,\pi,t)}{t^2} dt = o(\ln p(m(k)) \ln q(n(k))) ,\ k \to +\infty .$$

მაშინ

ა) თუ $d_{xy}(f) \neq 0$, მაშინ ყოველი დადებითი მატრიცისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს (2.9) პირობებს, გვექნება

(2.12) $$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \left(\frac{\pi^2}{d_{xy}(f)} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{m(k)n(k)}(f;x,y)}{\ln p(m(k)) \ln q(n(k))} \right) \le 1 ;$$

ბ) ყოველი $\gamma \in [0;1]$-თვის არსებობს ისეთი დადებითი მატრიცი, რომელიც აკმაყოფილებს (2.9) პირობას, რომ

(2.13) $$\lim_{k\to+\infty} \frac{\tilde{\sigma}_{m(k)n(k)}(f;x,y)}{\ln p(m(k)) \ln q(n(k))} = \frac{\gamma \cdot d_{xy}(f)}{\pi^2} .$$

(ii) არსებობს $f \in L(-\pi;\pi]^2$ ფუნქცია და ისეთი $m(k)$, $n(k)$, $p(m(k))$, $q(n(k))$ მიმდევრობები, რომ ადგილი აქვს (2.3), (2.10) და

(2.14) $$\int_{1/q(n(k))}^{\pi} \frac{\Psi(x,y,\pi,t)}{t^2} dt = O(\ln p(m(k)) \ln q(n(k))) ,\ k \to +\infty .$$

ამასთან მოიძებნება ისეთი A და B მატრიცები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.9) პირობას, ამავე დროს

(A) $$\underline{\lim_{k\to+\infty}} \left(\frac{\pi^2}{d_{xy}(f)} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{m(k)n(k)}(f;x,y)}{\ln p(m(k)) \ln q(n(k))} \right) > 1 ;$$

და

(B) $$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \left(\frac{\pi^2}{d_{xy}(f)} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{m(k)n(k)}(f;x,y)}{\ln p(m(k)) \ln q(n(k))} \right) < 1 .$$

შენიშვნა 2.1.4 თუ

$$\frac{\Psi(x,y,s,\pi)}{s} \text{ და } \frac{\Psi(x,y,\pi,t)}{t}$$

შემოსაზღვრული ფუნქციებია შესაბამისად, s და t-ს მიმართ, მაშინ (2.4) და (2.5) პირობები ექვივალენტურია ფ. მორიცის თეორემაში მოყვანილი პირობის (იხ. [16], (2.6)).

შენიშვნა 2.1.5 თეორემა 2.1.1 და შენიშვნა 2.1.4.-ის ძალით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ფ. მორისის თეორემაში პირობა (იხ. [16], (2.6)) არის საუკეთესო იმისათვის, რომ შეუღლებული ტრიგონომეტრიული ფურიეს ორჯერადი მწკრივების მართკუთხა კერძო ჯამების ინდექსები ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი იყოს.

2.2. ორი ცვლადის პერიოდული ფუნქციების ფურიეს შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივების ყოფაქცევის შესახებ თეორემების დამტკიცება

სანამ უშუალოდ შევუდგებით თეორემების დამტკიცებას, ჯერ დავამტკიცოთ დამხმარე დებულება, რომელსაც მომავალი მსჯელობებისთვის გამოვიყენებთ.

წინადადება 2.2.1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს $l(k)$ და $h(k)$ მიმდევრობები ისეთი, რომ

$$\lim_{k\to+\infty} h(k)=+\infty\,,\quad \lim_{k\to+\infty} l(k)=+\infty\,.$$

დავუშვათ რომ

$$\int_{1/h(k)}^{\pi}\frac{\Psi(x,y,s,\pi)}{s^2}ds=o(l(k))$$

და

$$\int_{1/h(k)}^{\pi}\frac{\Psi(x,y,\pi,s)}{s^2}ds=o(l(k))\,.$$

მაშინ

$$\Psi(x,y,1/h(k),\pi)\cdot l(k)=o(l(k))$$

და

$$\Psi(x,y,\pi,1/h(k))\cdot l(k)=o(l(k))\,.$$

დამტკიცება. ვინაიდან პირობები სიმეტრიულია, ამიტომ ჩვენ დავამტკიცებთ მხოლოდ ერთ შეფასებას.

რადგან $0\le\Psi(x,y,s,\pi)$ ყოველი s-თვის, გარდა ამისა, ის არაკლებადია s-ის მიმართ, ამიტომ ინტეგრალის მონოტონობის ძალით გვექნება

$$o(l(k))=\int_{1/h(k)}^{\pi}\frac{\Psi(x,y,s,\pi)}{s^2}ds\ge\int_{1/h(k)}^{2/h(k)}\frac{\Psi(x,y,s,\pi)}{s^2}ds\ge$$

$$\ge\Psi(x,y,1/h(k),\pi)\int_{1/h(k)}^{2/h(k)}\frac{1}{s^2}ds\ge\Psi(x,y,1/h(k),\pi)\left(-\frac{1}{s}\right)\Bigg|_{1/h(k)}^{2/h(k)}=$$

$$=\Psi(x,y,1/h(k),\pi)\left(-\frac{h(k)}{2}+h(k)\right)=\frac{h(k)\cdot\Psi(x,y,1/h(k),\pi)}{2}\,.$$

ცხადია, ეს მსჯელობები სამართლიანი იქნებოდა იმ შემთხვევაშიც, თუ განვიხილავდით $\Psi(x,y,\pi,s)$-ს. ეს ნიშნავს, რომ წინადადება 2.2.1 დამკიცებულია.

ჯერ დავამტკიცოთ თეორემა 2.1.3. განვიხილოთ $\tilde{\sigma}_{m(k)n(k)}(f;x,y)$. თუ გავითვალისწინებთ დირიხლეს შეუღლებული გულის კენტობას, მაშინ ინტეგრალის ადიციურობიდან მივიღებთ

$$\tilde{\sigma}_{m(k)n(k)}(f;x,y)=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u,v)\sum_{i=1}^{p(m(k))}\sum_{j=1}^{q(n(k))}a_{m(k)n(k)ij}\tilde{D}_i(x-u)\tilde{D}_j(y-v)dudv=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi (f(x+u,y+v)-f(x-u,y+v)-f(x+u,y-v)+f(x-u,y-v))\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{p(m(k))}\sum_{j=1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij}\tilde{D}_i(u)\tilde{D}_j(v)dudv=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi(x,y,u,v)\sum_{i=1}^{p(m(k))}\sum_{j=1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij}\tilde{D}_i(u)\tilde{D}_j(v)dudv+$$

(2.15) $$=\frac{d_{xy}(f)}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \sum_{i=1}^{p(m(k))}\sum_{j=1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij}\tilde{D}_i(u)\tilde{D}_j(v)dudv=A_1(k)+A_2(k)\,.$$

ჯერ დავამტკიცებთ თეორემა 2.1.3-ის (i) ა). (2.3) პირობის ძალით ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon>0$-თვის, მოიძებნება დადებითი რიცხვი, (საზოგადოდ დამოკიდებული ε-ზე) $\delta=\delta(\varepsilon)$ ისეთი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

(2.16) $$\frac{\Psi(x,y,\delta,\delta)}{\delta^2}<\varepsilon\,.$$

ვინაიდან $\lim\limits_{m\to+\infty} q(m)=+\infty$ და $\lim\limits_{n\to+\infty} q(n)=+\infty$, ავირჩიოთ k ისეთი, რომ $1/p(m(k))<\delta$ და $1/q(n(k))<\delta$, მაშინ გვექნება

(2.17) $$A_1(k)=\frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^{1/p(m(k))}+\int_{1/p(m(k))}^{\delta}+\int_\delta^\pi\right)\left(\int_0^{1/q(n(k))}+\int_{1/q(n(k))}^{\delta}+\int_\delta^\pi\right)\times$$

$$\times\varphi(x,y,u,v)\sum_{i=1}^{p(m(k))}\sum_{j=1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij}\tilde{D}_i(u)\tilde{D}_j(v)dudv=$$

$$=\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}B_{rs}\,.$$

B_{rs} და B_{sr} $r,s\in\{1,2,3\}$, $r\neq s$, შეფასდება ერთმანეთის ანალოგიურად. ვინაიდან $|\tilde{D}_k(t)|\le k$ ყოველი t-თვის და $|\tilde{D}_k(t)|\le 2/t$, როცა $0<t\le\pi$, (იხ. [21], თავი II, (5.11)), ამიტომ (2.15)-ის ძალით გვექნება:

$$|B_{11}|\le\frac{1}{\pi^2}\int_0^{1/p(m(k))}\int_0^{1/q(n(k))}|\varphi(x,y,u,v)|\sum_{i=1}^{p(m(k))}\sum_{j=1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij}|\tilde{D}_i(u)||\tilde{D}_j(v)|dudv\le$$

$$\le\frac{p(m(k))1/q(n(k))A_{m(k)n(k)}}{\pi^2}\int_0^{1/p(m(k))}\int_0^{1/q(n(k))}|\varphi(x,y,u,v)|dudv\le\frac{\varepsilon A_{m(k)n(k)}}{\pi^2}\,.$$

რადგან (2.9) პირობის ძალით $A_{mn}\to 1$, $m,n\to+\infty$. ამიტომ ქვემოთ მოყვანილ მსჯელობებში და შეფასებებში გამოვტოვებთ A_{mn} სიდიდეს.

v-ს მიმართ ნაწილობითი ინტეგრებით და (2.16)-ს ძალით მივიღებთ:

$$|B_{12}|\le\frac{2p(m(k))}{\pi^2}\int_0^{1/p(m(k))}\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{1}{v}d\int_0^v|\varphi(x,y,u,t)|dtdudv=$$

$$=\frac{2p(m(k))}{\pi^2\delta}\int_0^{1/p(m(k))}\int_0^{\delta}|\varphi(x,y,u,t)|dtdu-$$

$$-\frac{2p(m(k))q(n(k))}{\pi^2}\int_0^{1/p(m(k))}\int_0^{1/q(n(k))}|\varphi(x,y,u,t)|dtdu+$$

$$+\frac{2p(m(k))}{\pi^2}\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{1}{v^2}\int_0^{1/p(m(k))}\int_0^v|\varphi(x,y,u,t)|dtdudv\le$$

$$\le\frac{4\varepsilon}{\pi^2}+\frac{2\varepsilon}{\pi^2}\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{dv}{v}dv=o(\ln q(n(k)))\,.$$

თუ წინადადება 2.2.1.-ში ვიგულისხმებთ, რომ

$$h(k)=p(m(k))\,,\;\; l(k)=\ln p(m(k))\cdot\ln q(n(k))$$

და გავითვალისწინებთ (2.10)-ს, მივიღებთ:

$$\Psi(x,y,1/\,p(m(k)),\pi)\cdot p(m(k))=o(\ln p(m(k))\cdot\ln q(n(k)))\,.$$

მაშინ v-ს მიმართ ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება:

$$|B_{13}|\le\frac{2p(m(k))}{\pi^2}\int_0^{1/p(m(k))}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{v}d\int_0^v|\varphi(x,y,u,t)|dtdudv=$$

$$=\frac{2p(m(k))}{\pi^3}\int_0^{1/p(m(k))}\int_0^{\pi}|\varphi(x,y,u,t)|dtdu-$$

$$-\frac{2p(m(k))}{\pi^2\delta}\int_0^{1/p(m(k))}\int_0^{\delta}|\varphi(x,y,u,t)|dtdu+$$

$$+\frac{2p(m(k))}{\pi^2}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{v^2}\int_0^{1/p(m(k))}\int_0^v|\varphi(x,y,u,t)|dtdudv\le$$

$$\le\frac{2p(m(k))}{\pi^3}\Psi(x,y,1/\,p(m(k)),\pi)+$$

$$+\frac{2p(m(k))}{\pi^2}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{v^2}\Psi(x,y,1/\,p(m(k)),v)dv\le$$

$$\le o(\ln p(m(k))\cdot\ln q(n(k)))+$$

$$+\frac{2p(m(k))}{\pi^2}\cdot\Psi(x,y,1/\,p(m(k)),\pi)\cdot\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{v^2}dv=$$

$$=o(\ln p(m(k))\cdot\ln q(n(k)))\,.$$

განვიხილოთ B_{22}. გვაქვს

$$|B_{22}|\le\frac{4}{\pi^2}\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\left(\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{|\varphi(x,y,u,v)|}{v}dv\right)\frac{du}{u}\,.$$

ახლა v-ს მიმართ ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{1}{v}d\int_0^v|\varphi(x,y,u,t)|\,dt=\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}|\varphi(x,y,u,t)|\,dt-$$

$$-q(n(k))\int_0^{1/q(n(k))}|\varphi(x,y,u,t)|\,dt+\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{1}{v^2}\int_0^v|\varphi(x,y,u,t)|\,dtdv\le$$

$$\le\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}|\varphi(x,y,u,t)|\,dt+\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{1}{v^2}\int_0^v|\varphi(x,y,u,t)|\,dtdv\,.$$

ამ უკანასკნელს თუ ჩავსვამთ B_{22}-ის წარმოდგენაში და გამოვიყენებთ ნაწილობით ინტეგრების ფორმულას u-ს მიმართ, გვექნება:

$$\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\left(\frac{1}{\delta}\int_{0}^{\delta}|\varphi(x,y,u,t)|\,dt+\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{1}{v^2}\int_{0}^{v}|\varphi(x,y,u,t)|\,dtdv\right)\frac{du}{u}=$$

$$=\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\frac{1}{u}d\int_{0}^{u}\left(\frac{1}{\delta}\int_{0}^{\delta}|\varphi(x,y,s,t)|\,dt+\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{1}{v^2}\int_{0}^{v}|\varphi(x,y,s,t)|\,dtdv\right)ds\le$$

$$\le\frac{1}{\delta^2}\int_{0}^{\delta}\int_{0}^{\delta}|\varphi(x,y,s,t)|\,dsdt+\frac{1}{\delta}\int_{0}^{\delta}\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{1}{v^2}\int_{0}^{v}|\varphi(x,y,s,t)|\,dtdvds+$$

$$+\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{1}{u^2v^2}\int_{0}^{u}\int_{0}^{v}|\varphi(x,y,s,t)|\,dsdtdudv<$$

$$<\varepsilon+\varepsilon\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{dv}{v}+\varepsilon\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\int_{1/q(n(k))}^{\delta}\frac{dudv}{uv}.$$

საბოლოოდ,

$$B_{22}=o(\ln p(m(k))\cdot\ln q(n(k))).$$

ანალოგიურად, ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით (2.10)-დან მივიღებთ:

$$|B_{23}|\le\frac{4}{\pi^2}\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\left(\int_{\delta}^{\pi}\frac{|\varphi(x,y,u,v)|}{v}dv\right)\frac{du}{u}\le$$

$$\le\frac{4}{\pi^2\delta}\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\left(\int_{\delta}^{\pi}|\varphi(x,y,u,v)|\,dv\right)\frac{du}{u}\le$$

$$\le\frac{4}{\pi^2\delta}\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\left(\int_{0}^{\pi}|\varphi(x,y,u,v)|\,dv\right)\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{4}{\pi^2\delta}\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\frac{1}{u}\frac{d}{ds}\int_{0}^{u}\int_{0}^{\pi}|\varphi(x,y,s,v)|\,dsdvdu\le$$

$$\le\frac{4}{\pi^2\delta^2}\int_{0}^{\delta}\int_{0}^{\pi}|\varphi(x,y,s,v)|\,dsdv+$$

$$+\frac{4}{\pi^2\delta}\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\frac{1}{u^2}\int_{0}^{u}\int_{0}^{\pi}|\varphi(x,y,s,v)|\,dsdvdu=$$

$$=\frac{4\Psi(x,y,\delta,\pi)}{\pi^2\delta^2}+\frac{4}{\pi^2\delta}\int_{1/p(m(k))}^{\delta}\frac{\Psi(x,y,u,\pi)}{u^2}du=$$

$$=o(\ln p(m(k))\cdot\ln q(n(k))).$$

შევაფასოთ B_{33}. მივიღებთ:

$$|B_{33}|\le\frac{1}{\pi^2}\int_{\delta}^{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{|\varphi(x,y,u,v)|}{uv}dudv\le\frac{1}{\pi^2\delta^2}\int_{\delta}^{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\varphi(x,y,u,v)|dudv\le$$

$$\le\frac{1}{\pi^2\delta^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}|\varphi(x,y,u,v)|dudv=O(1).$$

საბოლოოდ B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{22}, B_{23}, B_{33} წევრების შეფასებებიდან და იმ ფაქტიდან რომ სიმეტრიულინდექსებიანი წევრები მსგავსად შეფასდება, გვაქვს

(2.18) $$\lim_{k\to+\infty}\frac{A_1(k)}{\ln p(m(k))\ln q(n(k))}=0.$$

განვიხილოთ $A_2(k)$. ვთქვათ

$$U_i = \int_0^{\pi} \tilde{D}_i(t)dt .$$

U_i-სთვის მართებულია (1.26). განვიხილოთ

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{i=1}^{p(m(k))} \sum_{j=1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij} \tilde{D}_i(u) \tilde{D}_j(v) dudv =$$

$$= \sum_{i=1}^{p(m(k))} \sum_{j=1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij} U_i U_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{m(k)n(k)ij} U_i U_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=N+1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij} U_i U_j + \sum_{i=N+1}^{p(m(k))} \sum_{j=1}^{N} a_{m(k)n(k)ij} U_i U_j +$$

$$+ \sum_{i=N+1}^{p(m(k))} \sum_{j=N+1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij} U_i U_j \le C_2^2(N) A_{m(k)n(k)} +$$

$$+(1+\varepsilon) C_2(N) A_{m(k)n(k)} \ln q(n(k)) + (1+\varepsilon) C_2(N) A_{m(k)n(k)} \ln p(m(k)) +$$

$$+(1+\varepsilon)^2 A_{m(k)n(k)} \ln q(n(k)) \ln p(m(k)) ,$$

სადაც

$$C(N) = \max_{0\le i \le N} |U_i| .$$

ამგვარად, გვაქვს

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \left(\frac{\pi^2}{d_{xy}(f)} \cdot \frac{A_2(k)}{\ln p(m(k)) \ln q(n(k))} \right) \le 1 ,$$

საბოლოოდ (2.17) და უკანასკნელის ძალით მივიღებთ (2.12)-ს.

ახლა ვაჩვენოთ თეორემა 2.1.3 (i)-ის ბ)-ნაწილის სამართლიანობა. ნებისმიერი $\gamma \in [0;1]$-თვის განვიხილოთ $\gamma(i) \to \gamma$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $p^{\gamma(i)}(i) \to +\infty$, $i \to +\infty$. ავაგოთ მატრიცები (b_{mi}) და (c_{nj}) ისეთი, რომ

(2.19)
$$b_{m(k)i} = \begin{cases} 1, \text{ Tu } i = [p^{\gamma(m(k))}(m(k))], \\ 0, \text{ Tu } i \ne [q^{\gamma(m(k))}(m(k))], \end{cases}$$

და

(2.20)
$$c_{n(k)j} = \begin{cases} 1, \text{ Tu } j = q(n(k)), \\ 0, \text{ Tu } j \ne q(n(k)). \end{cases}$$

ადვილი დასანახია, რომ (b_{mi}) და (c_{nj}) მატრიცები რეგულარულებია (იხ. [21] თავი III). ჩვენ ავაგებთ (a_{mnij}) მატრიცს, სადაც $a_{mnij} = b_{mi} \cdot c_{nj}$. აგრეთვე, ადვილი დასანახია ის ფაქტიც, რომ ამ გზით აგებული (a_{mnij}) მატრიცი აკმაყოფილებს (2.9) პირობას. ამიტომ გვაქვს:

$$A_2(k) = \frac{d_{xy}(f)}{\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{i=1}^{p(m(k))} \sum_{j=1}^{q(n(k))} a_{m(k)n(k)ij} \tilde{D}_i(u) \tilde{D}_j(v) dudv =$$

$$= \frac{d_{xy}(f)}{\pi^2} \cdot \sum_{i=1}^{p(m(k))} b_{m(k)i} \int_0^{\pi} \tilde{D}_i(u)du \cdot \sum_{j=1}^{q(n(k))} c_{nj} \int_0^{\pi} \tilde{D}_j(v)dv =$$

$$= \frac{d_{xy}(f)}{\pi^2} \cdot \sum_{i=1}^{p(m(k))} b_{m(k)i} U_i \cdot \sum_{j=1}^{q(n(k))} c_{nj} U_j .$$

(1.26)-ის ძალით, თუ k-ს ავიღებთ იმდენად დიდს, რომ $p^{\gamma(m(k))}(m(k)) > N$, გვექნება

$$\sum_{i=1}^{p(m(k))} b_{m(k)i} U_i = U_{[p^{\gamma(m(k))}(m(k))]} = (1+\varepsilon)\ln[p^{\gamma(m(k))}(m(k))] \le$$

$$\le (1+\varepsilon)\ln p^{\gamma(m(k))}(m(k)) = (1+\varepsilon)\cdot\gamma(m(k))\cdot\ln p(m(k)).$$

მეორე მხრივ,

$$\sum_{i=1}^{p(m(k))} b_{m(k)i} U_i = U_{[p^{\gamma(m(k))}(m(k))]} \ge (1-\varepsilon)\ln[p^{\gamma(m(k))}(m(k))] \ge$$

$$\ge (1-\varepsilon)\ln(p^{\gamma(m(k))}(m(k))/2) =$$

$$= (1-\varepsilon)\cdot\gamma(m(k))\cdot\ln p(m(k)) - (1-\varepsilon)\ln 2,$$

ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{p(m(k))} b_{m(k)i} U_i \simeq \gamma(m(k))\cdot\ln p(m(k)).$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^{q(n(k))} c_{nj} U_j \simeq \ln q(n(k)).$$

საბოლოოდ, გვექნება

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{A_2(k)}{\ln p(m(k))\ln q(n(k))} = \frac{\gamma\cdot d_{xy}(f)}{\pi^2}.$$

რადგან ჩვენ მიერ აგებული მატრიცი დადებითია და აკმაყოფილებს (2.9) პირობას, ამიტომ ამ შემთხვევაშიც სამართლიანია (2.18), რაც უკანასკნელ შეფასებასთან ერთად ამტკიცებს (2.13)-ს. ამრიგად, დავასრულეთ თეორემის (i) ნაწილის მტკიცება.

(ii) განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in(0;1)^2\cup[1;\pi]^2; \\ |\ln y|+1 & (x,y)\in(1;\pi]\times(0;1); \\ \dfrac{2|\ln x|-1}{2\sqrt{|\ln x|}}+1 & (x,y)\in(0;1)\times(1;\pi]; \\ 0 & (x,y)\in(-\pi;\pi]^2\setminus(0;\pi]^2. \end{cases} \tag{2.21}$$

ცხადია, რომ $f\in L(-\pi;\pi]^2$. ავიღოთ $d_{00}(f)=1$ და ვაჩვენოთ, რომ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.3), (2.10) და (2.14) პირობებს (0,0) წერტილში. დავუშვათ $0<t\le 1$ და $0<s\le e^{-1/2}$, მაშინ გვაქვს

$$\frac{\Psi(0,0,s,t)}{st} = \frac{1}{st}\int_0^s\int_0^t |\varphi(0,0,u,v)|\,dudv =$$

$$= \frac{1}{st}\int_0^s\int_0^t (f(u,v)-1)\,dudv = 0,$$

ე. ი. სრულდება (2.3) პირობა (0,0) წერტილში. განვიხილოთ

$$\Psi(0,0,s,\pi) = \int_0^\pi dv\int_0^s |\varphi(0,0,u,v)|\,du =$$

$$= \int_1^\pi dv\int_0^s |\varphi(0,0,u,v)|\,du = \int_1^\pi dv\int_0^s \frac{-2\ln u-1}{2\sqrt{-\ln u}}\,du =$$

$$= (\pi - 1)u\sqrt{-\ln u}\Big|_0^s = (\pi - 1)s\sqrt{\ln(1/s)} .$$

ამის გარდა,

$$\Psi(0,0,\pi,t) = \int_0^{\pi} du \int_0^t |\varphi(0,0,u,v)| dv =$$

$$= \int_1^{\pi} du \int_0^t |\varphi(0,0,u,v)| dv = \int_1^{\pi} du \int_0^t -\ln v dv =$$

$$= (\pi - 1)(-u\ln u)\Big|_0^t = (\pi - 1)t\ln(1/t) .$$

თუ დავუშვებთ, რომ p, q, m და n მიმდევრობები იგივური მიმდევრობებია, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_{1/k}^{\pi} \frac{\Psi(x,y,s,\pi)}{s^2} ds = (\pi - 1)\int_{1/k}^{\pi} \frac{\sqrt{\ln(1/s)}}{s} ds \le$$

$$\le (\pi - 1)\sqrt{\ln k}\int_{1/k}^{\pi} \frac{1}{s} ds = (\pi - 1)\sqrt{\ln k}\ln s\Big|_{1/k}^{\pi} =$$

$$= (\pi - 1)\sqrt{\ln k}\ln \pi + (\pi - 1)\sqrt{\ln k}\ln(1/k) =$$

$$= o(\ln^2 k) , \quad k \to +\infty ,$$

და

$$\int_{1/k}^{\pi} \frac{\Psi(x,y,\pi,t)}{t^2} dt = (\pi - 1)\int_{1/k}^{\pi} \frac{\ln(1/t)}{t} dt = -(\pi - 1)\frac{\ln^2 t}{2}\Big|_{1/k}^{\pi} =$$

$$= -(\pi - 1)\frac{\ln^2 \pi}{2} + (\pi - 1)\frac{\ln^2(1/k)}{2} = (\pi - 1)\frac{\ln^2 k}{2} - (\pi - 1)\frac{\ln^2 \pi}{2} \simeq$$

$$\simeq \frac{(\pi - 1)}{2}\ln^2 k , \quad k \to +\infty .$$

უკანასკნელი შეფასებები ნიშნავს, რომ სრულდება (2.10) და (2.14) პირობები.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის (ii) ნაწილში (A).

დავუშვათ A მატრიცი არის ერთეულოვანი მატრიცი. $\tilde{\sigma}_{kk}(f;0,0)$ წარმოვადგინოთ თეორემის პირველის ნაწილის მტკიცებაში განხილულის ანალოგიური სახით

$$\tilde{\sigma}_{kk}(f;0,0) = A_1(k) + A_2(k) .$$

განვიხილოთ $A_1(k)$. ავიღოთ $\delta = 1$. ცხადია, ამ შემთხვევაში სრულდება (2.16). ავირჩიოთ $k > 1$ გვექნება:

$$A_1(k) = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^{1/k} + \int_{1/k}^{1} + \int_1^{\pi}\right)\left(\int_0^{1/k} + \int_{1/k}^{1} + \int_1^{\pi}\right)\varphi(x,y,u,v)\tilde{D}_k(u)\tilde{D}_k(v) du dv = \tag{2.22}$$

$$= \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} B_{rs} .$$

თეორემის პირველი ნაწილის მტკიცებიდან გამომდინარე B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{21}, B_{22}, B_{23}, B_{33} წევრების შეფასებები დარჩება ძალაში, ანუ გვაქვს

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{B_{11} + B_{12} + B_{13} + B_{21} + B_{22} + B_{23} + B_{33}}{\ln^2 k} = 0 .$$

განვიხილოთ B_{31} და B_{32}. მივიღებთ:

(2.23) $$B_{31}\le\frac{2k}{\pi^2}\int_1^{\pi}\int_0^{1/k}\frac{|\varphi(x,y,u,v)|}{u}dudv=\frac{2k}{\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{du}{u}\cdot\int_0^{1/k}|\ln v|\,dv=$$
$$=-\frac{2k}{\pi^2}\ln u\Big|_1^{\pi}\cdot v\ln v\Big|_0^{1/k}=\frac{2}{\pi^2}\ln\pi\cdot\ln k=O(\ln k)\,,$$

და

$$B_{32}=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\int_{1/k}^{1}\varphi(x,y,u,v)\tilde{D}_k(u)\tilde{D}_k(v)dudv=$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\tilde{D}_k(u)\tilde{D}_k(v)dudv=$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\tilde{D}_k(u)du\cdot\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\tilde{D}_k(v)dv=E_1\cdot E_2\,.$$

გვაქვს:

$$E_1=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\tilde{D}_k(u)du=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\tilde{D}_k^*(u)du+\frac{1}{2\pi^2}\int_1^{\pi}\sin kudu=F_1+F_2\,.$$

ცხადია, $F_2\to 0$, $k\to+\infty$. მაშინ (იხ. [21] თავი II, (5.2))

$$F_1=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\tilde{D}_k^*(u)du=\frac{1}{2\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{1-\cos ku}{\tan(u/2)}du\ge$$
$$\ge\frac{1}{2\pi^2}\int_1^{\pi/2}(1-\cos ku)du=\frac{\pi-2}{4\pi^2}-\frac{1}{2\pi^2}\int_1^{\pi/2}\cos kudu=G_1+G_2\,.$$

ადვილი დასანახია, რომ $G_2\to 0$, $k\to+\infty$. განვიხილოთ

$$E_2=\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\tilde{D}_k(v)dv=\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\tilde{D}_k^*(v)dv+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{1/k}^{1}|\ln v|\sin kvdv=H_1+H_2\,.$$

საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის ძალით

$$H_2=\frac{1}{2}\int_{1/k}^{1}|\ln v|\sin kvdv=-\frac{1}{2}\ln(1/k)\int_{1/k}^{l}\sin kvdv=O\left(\frac{\ln k}{k}\right),$$

სადაც $l\in[1/k;1]$. ამის გარდა,

$$H_1=\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\tilde{D}_k^*(v)dv=\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\frac{1-\cos kv}{2\tan(v/2)}dv\ge$$
$$\ge\cos(1/2)\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\frac{1-\cos kv}{2\sin(v/2)}dv\ge\cos(1/2)\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\frac{1-\cos kv}{v}dv=$$
$$=\cos(1/2)\int_{1/k}^{1}\frac{|\ln v|}{v}dv-\cos(1/2)\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\frac{\cos kv}{v}dv=J_1-J_2\,.$$

საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის ძალით გვაქვს:

$$J_2=\cos(1/2)\int_{1/k}^{1}|\ln v|\,\frac{\cos kv}{v}dv=$$
$$=-\cos(1/2)k\ln(1/k)\int_{1/k}^{l}\cos kvdv=O(\ln k)\,,$$

სადაც $l \in [1/k;1]$. ამის გარდა,

$$J_1 = -\cos(1/2)\int_{1/k}^{1} \frac{\ln v}{v} dv = J_1 = -\cos(1/2)\left.\frac{\ln^2 v}{2}\right|_{1/k}^{1} =$$

$$= -\cos(1/2)\frac{\ln^2 1}{2} + \cos(1/2)\frac{\ln^2(1/k)}{2} =$$

$$= \cos(1/2)\frac{(\ln 1 - \ln k)^2}{2} = \frac{\cos(1/2)}{2}\ln^2 k .$$

ამიტომ

$$\underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{A_1(k)}{\ln^2 k} = \underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{E_1 \cdot E_2}{\ln^2 k} = \underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{(F_1+F_2)(H_1+H_2)}{\ln^2 k} =$$

$$= \underline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{F_1 \cdot H_1}{\ln^2 k} \geq \lim_{k\to+\infty} \frac{(G_1+G_2)(J_1-J_2)}{\ln^2 k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{G_1(J_1-J_2)}{\ln^2 k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{G_1 \cdot J_1}{\ln^2 k} = \frac{(\pi-2)\cos(1/2)}{8\pi^2} .$$

საბოლოოდ,

$$\underline{\lim}_{k\to+\infty} \left(\frac{\pi^2}{d_{00}(f)} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{kk}(f;0,0)}{\ln^2 k} \right) = \underline{\lim}_{k\to+\infty} \pi^2 \frac{A_1(k)+A_2(k)}{\ln^2 k} \geq$$

$$\geq \pi^2 \left(\frac{\cos(1/2)(\pi-2)}{8\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \right) = 1 + \frac{\cos(1/2)(\pi-2)}{8} > 1 .$$

ეს ამტკიცებს თეორემა 2.1.3-ის (A)-ს.

დავამტკიცოთ თეორემა 2.1.3-ის (B).

ავაგოთ $B = (a_{mnij})$ მატრიცი შემდეგნაირად, $a_{mnij} = b_{mi} \cdot c_{nj}$, სადაც (b_{mi}) და (c_{nj}) აგებულია შესაბამისად (2.19) და (2.20)-ის მსგავსად. ვთქვათ $\gamma = 0$, ხოლო (c_{nj}) მატრიცი არის ერთეულოვანი, მაშინ თეორემის (i) ბ) ნაწილის მტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{A_2(k)}{\ln^2 k} = \gamma \frac{d_{00}(f)}{\pi^2} = 0 .$$

ცხადია, აღნიშნულ შემთხვევაშიც ძალაში რჩება B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{22}, B_{23}, B_{33} წევრების შეფასებები, რომლებიც თეორემის (i) ნაწილის მტკიცებაშია მოყვანილი. აგრეთვე ძალაში რჩება B_{31}-ის შეფასება (იხ. (2.23)). ამგვარად, ვასკვნით, რომ

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{B_{11}+B_{12}+B_{13}+B_{21}+B_{22}+B_{23}+B_{31}+B_{33}}{\ln^2 k} = 0 .$$

განვიხილოთ B_{32}. (2.20) წარმოდგენიდან გვაქვს

$$B_{32} = \frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\int_{1/k}^{1} \varphi(x,y,u,v)\tilde{D}_k(v)\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\tilde{D}_i(u)dudv =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\tilde{D}_i(u)du \cdot \int_{1/k}^{1} |\ln v|\, \tilde{D}_k(v)dv = K_1 \cdot K_2 .$$

განვიხილოთ K_1

$$K_1 = \frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\int_1^{\pi} \tilde{D}_i(u)du = \frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\int_1^{\pi} \tilde{D}_i^*(u)du +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\int_1^{\pi}\sin iu du = L_1 + L_2 ,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\left.\frac{-\cos iu}{i}\right|_1^{\pi} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\frac{-\cos i\pi + \cos i}{i} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\frac{1}{i} = \frac{1}{\pi^2[k^{\gamma(k)}]};$$

(b_{mi}) მატრიცის აგებისას $\gamma(k)$ მიმდევრობა ისე იყო აგებული, რომ $k^{\gamma(k)} \to +\infty$, $k \to +\infty$. აქედან გამომდინარე $L_2 \to 0$, $k \to +\infty$. ამასთან

$$L_1 = \frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\int_1^{\pi}\frac{1-\cos iu}{2\tan(u/2)}du = \frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{du}{2\tan(u/2)} -$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\int_1^{\pi}\frac{\cos iu}{2\tan(u/2)}du = M_1 - M_2 .$$

საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემის თანახმად

$$M_2 = \frac{1}{\pi^2 2\tan(1/2)}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\int_1^{l}\cos iu du =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 2\tan(1/2)}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\left.\frac{\sin iu}{i}\right|_1^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 2\tan(1/2)}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\frac{\sin il - \sin i}{i} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^2 \tan(1/2)}\sum_{i=1}^{k} b_{ki}\frac{1}{i} = \frac{1}{\pi^2 \tan(1/2) k^{\gamma(k)}} .$$

ცხადია, L_2-ის მსგავსად $M_2 \to 0$, $k \to +\infty$. ამასთან,

$$M_1 = \frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{d\sin(u/2)}{\sin(u/2)} = \frac{1}{\pi^2}\ln\sin(u/2)\Big|_1^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}(\ln\sin(\pi/2) - \ln\sin(1/2)) = -\frac{\ln\sin(1/2)}{\pi^2} .$$

განვიხილოთ K_2

$$K_2 = \int_{1/k}^{1} |\ln v|\,\tilde{D}_k^*(v)dv + \frac{1}{2}\int_{1/k}^{1} |\ln v|\sin kv dv = N_1 + N_2 .$$

ვინაიდან $K_2 = E_2$, ამიტომ უკვე ჩატარებული მსჯელობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$N_2 = H_2 = O\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

განვიხილოთ N_1

$$N_1 = \int_{1/k}^{1} |\ln v|\frac{1-\cos kv}{2\tan(v/2)}dv \le \int_{1/k}^{1} |\ln v|\frac{1-\cos kv}{v}dv =$$

$$= \int_{1/k}^{1}\frac{|\ln v|}{v}dv - \int_{1/k}^{1} |\ln v|\frac{\cos kv}{v}dv = Q_1 - Q_2 .$$

J_1 და J_2 წევრების შეფასებების ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $Q_1 = \ln^2 k/2$, ხოლო $Q_2 = O(\ln k)$. მაშინ A_1-ის შეფასებისთვის გვექნება

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{A_1(k)}{\ln^2 k} = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{K_1 \cdot K_2}{\ln^2 k} = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{(L_1+L_2)(N_1+N_2)}{\ln^2 k} =$$

$$= \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{L_1 \cdot N_1}{\ln^2 k} \le \lim_{k\to+\infty} \frac{(M_1-M_2)(Q_1-Q_2)}{\ln^2 k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{M_1(Q_1-Q_2)}{\ln^2 k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{M_1 \cdot Q_1}{\ln^2 k} = -\frac{\ln\sin(1/2)}{2\pi^2}.$$

რადგან $\sin(1/2) < 1/2$, გვექნება

$$-\ln\sin(1/2) < -\ln(1/2) = \ln 2.$$

საბოლოოდ,

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \left(\frac{\pi^2}{d_{00}(f)} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{kk}(f;0,0)}{\ln^2 k} \right) = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \pi^2 \frac{A_1(k)+A_2(k)}{\ln^2 k} =$$

$$= \overline{\lim_{k\to+\infty}} \pi^2 \frac{A_1(k)}{\ln^2 k} \le \lim_{k\to+\infty} \pi^2 \frac{M_1 \cdot Q_1}{\ln^2 k} = -\frac{\ln\sin(1/2)}{2} < \frac{\ln 2}{2} < 1.$$

ეს ამტკიცებს (B)-ს. ეს კი ასრულებს თეორემა 2.1.3-ის (ii) ნაწილის მტკიცებას.

თეორემა 2.1.3 დამტკიცებულია.

თეორემა 2.1.1-ის დამტკიცება იოლად გამომდინარეობს თეორემებიდან 2.1.2 და 2.1.3. ამის გამო ჩვენ მას აქ არ განვიხილავთ.

თეორემა 2.1.2-ის დამტკიცება.

ვინაიდან თეორემა 2.1.2-ის პირობაში α_k და β_k არაუარყოფითი მიმდევრობებია, ამიტომ ჩეზაროს განზოგადებული (C,α_k,β_k) საშუალოები განისაზღვრება დადებითი, რეგულარული, მატრიცით. ვინაიდან (2.9) პირობა რეგულარობის აუცილებელი პირობაა ე. ი. აღნიშნული მატრიცისთვის სრულდება (2.9) პირობა.

აღნიშნული გვაძლევს შესაძლებლობას თეორემა 2.1.2-ის დამტკიცებისათვის გამოვიყენოთ თეორემა 2.1.3-ის მტკიცებაში გამოყენებული ზოგიერთი წარმოდგენები, შეფასებები და აღნიშვნები.

(2.15)-ის მსგავსად წარმოვადგენთ $t^{\alpha_k,\beta_k}_{m(k)n(k)}(f;x,y)$-ს, შესაბამისი წევრი $A_1(k)$ წარმოდგება (2.17)-ს ანალოგიურად. ანუ და შესაბამისი წევრების (იხ. B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{22}, B_{23}, B_{31}, B_{32}, B_{33}) შეფასებები დარჩება ძალაში, ანუ

(2.24) $$\lim_{k\to+\infty} \frac{A_1(k)}{\ln m(k) \ln n(k)} = 0.$$

საჩვენებელი დაგვრჩება შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{\pi^2}{d_{xy}(f)} \cdot \frac{A_2(k)}{\ln m(k) \ln n(k)} \right) = 1.$$

განვიხილოთ $A_2(k)$:

$$A_2(k)=\frac{d_{xy}(f)}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{A_{m(k)}^{\alpha_k}A_{n(k)}^{\beta_k}}\sum_{i=1}^{m(k)}\sum_{j=1}^{n(k)}A_{m(k)-i}^{\alpha_k-1}A_{n(k)-j}^{\beta_k-1}\tilde{D}_i(u)\tilde{D}_j(v)dudv=$$

$$=\frac{d_{xy}(f)}{\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{1}{A_{m(k)}^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{m(k)}A_{m(k)-i}^{\alpha_k-1}\tilde{D}_i(u)du\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\frac{1}{A_{n(k)}^{\beta_k}}\sum_{j=1}^{n(k)}A_{n(k)-j}^{\beta_k-1}\tilde{D}_j(v)dv=$$

$$=\frac{d_{xy}(f)}{\pi^2}\int_0^{\pi}\tau_{m(k)}^{\alpha_k}(u)du\cdot\int_0^{\pi}\tau_{n(k)}^{\beta_k}(u)dv\,.$$

ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ (იხ. თეორემა 1.1.1-ის დამტკიცება, $A_2(n)$-წევრის შეფასება)

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\ln k}\int_0^{\pi}\tau_k^{\alpha_k}(u)du=1\,,$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\ln m(k)}\int_0^{\pi}\tau_{m(k)}^{\alpha_k}(u)du=1\,,$$

და

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\ln n(k)}\int_0^{\pi}\tau_{n(k)}^{\beta_k}(u)du=1\,.$$

ამ უკანასკნელი შეფასებებიდან კი დავასკვნით რომ $A_2(k)$-სთვის გვაქვს შემდეგი შეფასება.

(2.25)
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{A_2(k)}{\ln m(k)\ln n(k)}=\frac{d_{xy}(f)}{\pi^2}\,,$$

უკანასკნელი (2.24)-თან ერთად ამტკიცებს (2.8)-ს. თეორემა 2.1.2-ის (i) ნაწილი დამტკიცებულია.

(ii) განვიხილოთ $m(k)=n(k)=k$, ფუნქცია განსაზღვრული (2.21) ფორმულით. თეორემა 2.1.3. ის (ii) ნაწილის მტკიცებისას ნაჩვენები, იყო, რომ აღნიშნული მიმდევრობებისთვის და ფუნქციისთვის სრულდება (2.3), (2.4) და (2.7).

წარმოვადგენთ $t_{kk}^{\alpha_k,\beta_k}(f;0,0)$-ს. (2.15)-ის მსგავსად და, ცხადია, (2.25)-ის ძალით გვექნება:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{A_2(k)}{\ln^2 k}=\frac{1}{\pi^2}\,.$$

$A_1(k)$-ს წარმოვადგენთ (2.17) სახით, ადვილი დასანახია, რომ აღნიშნულ შემთხვევაშიც ძალაში რჩება B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{22}, B_{23}, B_{33} წევრების შეფასებები (რომლებიც თეორემის (i) ნაწილის მტკიცებაშია მოყვანილი). აგრეთვე, ძალაში რჩება B_{31}-თვის (2.23)-ის ანალოგიური შეფასება. ამიტომ მივიღებთ:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{B_{11}+B_{12}+B_{13}+B_{21}+B_{22}+B_{23}+B_{31}+B_{33}}{\ln^2 k}=0\,.$$

განვიხილოთ B_{32}:

$$B_{32}=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\int_{1/k}^{1}|\ln v|\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}\tilde{D}_i(u)\frac{1}{A_k^{\beta_k}}\sum_{j=1}^{k}A_{k-i}^{\beta_k-1}\tilde{D}_j(v)dudv=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}\tilde{D}_i(u)du\cdot\int_{1/k}^{1}|\ln v|\frac{1}{A_k^{\beta_k}}\sum_{j=1}^{k}A_{k-i}^{\beta_k-1}\tilde{D}_j(v)dv=R_1\cdot R_2\,.$$

$$R_1=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}\tilde{D}_i^*(u)du+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}\sin iudu=T_1+T_2\,.$$

ვინაიდან არაუარყოფითი (α_k) მიმდევრობისთვის (C,α_k) შეჯამებადობის რეგულარული მეთოდია (იხ. [9], თეორემა 1) გვაქვს

$$\lim_{k\to+\infty}T_2=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}\sin iudu=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}\int_1^{\pi}\sin iudu=0\,.$$

მეორე მხრივ,

$$T_1=\frac{1}{\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}\frac{1-\cos iu}{2\tan(u/2)}du\geq$$

$$\geq\frac{1}{2\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}\frac{1-\cos iu}{u}du\geq$$

$$\geq\frac{1}{2\pi^2}\int_1^{\pi}\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}(1-\cos iu)du\geq$$

$$\geq\frac{\pi-1}{2\pi^2}-\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{A_k^{\alpha_k}}\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^{\alpha_k-1}\int_1^{\pi}\cos iudu=V_1-V_2\,.$$

$V_2\to 0\,,\ k\to+\infty\,.$

განვიხილოთ წარმოდგენა:

$$\frac{1}{A_k^{\beta_k}}\sum_{j=1}^{k}A_{k-i}^{\beta_k-1}\tilde{D}_j(v)=\frac{1}{A_k^{\beta_k}}\sum_{j=1}^{k}A_{k-i}^{\beta_k-2}A_j^1\tilde{K}_j(v)\,,$$

სადაც $\tilde{K}_j(v)$ აღნიშნავს დირიხლეს შეუღლებული გულის $(C,1)$ საშუალოს. ცნობილია, რომ

$$\tilde{K}_j(v)=\frac{1}{2}\cot v-\frac{\sin(jv+v)}{(j+1)(2\sin(v/2))^2}\,.$$

განვიხილოთ R_2

$$R_2=\int_{1/k}^{1}|\ln v|\frac{1}{A_k^{\beta_k}}\sum_{j=1}^{k}A_{k-i}^{\beta_k-2}A_j^1\left(\frac{1}{2}\cot v-\frac{\sin(jv+v)}{(j+1)(2\sin(v/2))^2}\right)dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1/k}^{1}|\ln v|\cot vdv-\int_{1/k}^{1}|\ln v|\frac{1}{A_k^{\beta_k}}\sum_{j=1}^{k}A_{k-i}^{\beta_k-2}\frac{\sin(jv+v)}{(2\sin(v/2))^2}dv=W_1-W_2\,.$$

გვაქვს

$$W_1\geq-\frac{\cos 1}{2}\int_{1/k}^{1}\frac{\ln v}{\sin v}dv\geq-\frac{\cos 1}{2}\int_{1/k}^{1}\frac{\ln v}{v}dv=-\frac{\cos 1}{4}\ln^2 v\Big|_{1/k}^{1}=$$

$$=-\frac{\cos 1}{4}\ln^2 1+\frac{\cos 1}{4}\ln^2(1/k)=\frac{\cos 1}{4}\ln^2 k\,.$$

$$W_2 = \int_{1/k}^{1} |\ln v| \frac{1}{A_k^{\beta_k}} \sum_{j=1}^{k} A_{k-i}^{\beta_k-2} \frac{\sin(jv+v)}{(2\sin(v/2))^2} dv \le$$

$$\le \frac{A_k^{\beta_k-1}}{4A_k^{\beta_k}} \int_{1/k}^{1} \frac{|\ln v|}{(v/4)^2} dv = \frac{4A_k^{\beta_k-1}}{A_k^{\beta_k}} \int_{1/k}^{1} \frac{|\ln v|}{v^2} dv = \frac{4A_k^{\beta_k-1}}{A_k^{\beta_k}} \left(\frac{\ln v}{v} + \frac{1}{v} \right)_{1/k}^{1} =$$

$$= \frac{4A_k^{\beta_k-1}}{A_k^{\beta_k}} \left(k\ln k - k + 1 \right) = O\left(\frac{k^{\beta_k-1}(k\ln k - k + 1)}{k^{\beta_k}} \right) = O(\ln k)\,.$$

უკანასკნელი შეფასებებიდან

$$\varliminf_{k\to+\infty} \frac{A_1}{\ln^2 k} = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{R_1 \cdot R_2}{\ln^2 k} = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{(T_1+T_2)(W_1-W_2)}{\ln^2 k} \ge$$

$$\ge \lim_{k\to+\infty} \frac{(V_1+V_2)W_1}{\ln^2 k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{V_1W_1}{\ln^2 k} = \cos 1 \cdot \frac{\pi - 1}{8\pi^2}\,.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$\varliminf_{k\to+\infty} \left(\frac{\pi^2}{d_{xy}(f)} \cdot \frac{t_{kk}^{\alpha_k,\beta_k}(f;0,0)}{\ln^2 k} \right) = \varliminf_{k\to+\infty} \pi^2 \frac{A_1(k) + A_2(k)}{\ln^2 k} =$$

$$= \pi^2 \left(\cos 1 \cdot \frac{\pi - 1}{8\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \right) = \cos 1 \cdot \frac{\pi - 1}{8} + 1 > 1\,.$$

თეორემა 2.2 დამტკიცებულია.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. Lukacs F. Uber die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe. J. Reine Angew. Math., (1920) 150, 107-112.
2. Riad R. On the conjugate of the Walsh series, Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eotvos, Sect. Math. (1987), 30, 69-76.
3. Moricz F. Determination of jumps in terms of Abel-Poisson means, Acta Math. Hungar., (2003), 98, 259-262.
4. Moricz F. Ferenc Lukacs type theorems in terms of the Abel-Poisson mean of conjugate series, Proceedings of the American mathematical society., (2002), 131, 4, 1243-1250.
5. Pinsky M. Inverse problems in Fourier analysis and summability theory., Methods and applications of analysis., (2004), Vol 11, No. 3, 317-330.
6. Zviadadze Sh. On the Statement of F. Lukacs, Bull. Georgian Acad. Sci., (2005), 171, 411-412.
7. Zviadadze Sh. On a Lukacs theorem for regular linear means of conjugate trigonometric Fourier series, Bull. Georgian Acad. Sci., (2006), 173, 435-438.
8. Akhobadze T. On generalized Cesaro summability of trigonometric Fourier series, Bull. Georgian Acad. Sci., (2004), 170, 23-24.
9. Akhobadze T. On the convergence of generlized Cesaro means of trigonometric Fourier series. I, Acta Math hungar., (2007), 115, 59-78.
10. Akhobadze T. On the convergence of generlized Cesaro means of trigonometric Fourier series. II, Acta Math hungar., 115, (2007), 79-100.
11. Zhou P., Zhou S. P. More on determination of jumps. Acta Math. Hungar., (2008) 118, 41-52.
12. Dansheng Y., Zhou P., Zhou S. P. On determination of jumps in terms of Abel-Poisson mean, J. Math. Anal. Appl. (2008) 341, 12-23.
13. Taberski R. Convergence of some trigonometric sums, Demonstratio Mathematica, (1973), Vol 5, 101-117.
14. Taberski R. On general Dirichlet's integrals. Anales soc. Math Polonae, Series I: Prace mathematyczne., (1974), XVII, 499-512.
15. Zviadadze Sh. On generalizations of a theorem of Ferenc Lukacs. Acta Math hungar., 122 (1-2) (2009), 105-120.
16. Moricz F. Extension of a theorem of Ferenc Lukacs from single to double conjugate series. J. Math. Anal. Appl., (2001), 259, No.2, 582-595.
17. Moricz F. Determination of jumps in terms of Abel-Poisson mean of double conjugate series. Acta Sci. Math., (2003) 69, 677-686.
18. Dansheng Y. Zhou P. Zhou S. On determination of jumps in terms of the Abel-Poisson mean of Fourier series II. Analysis Mathematica, (2009) 35, 233-247.
19. Zviadadze Sh. On some properties of double conjugate trigonometric Fourier series., Acta Math hungar., 134 (4), (2012), 452-471.
20. Moricz F., Wade W. R. An analogue of a theorem of Ferenc Lukacs for double Walsh-Fourier series. Acta Math. Hungar., 95 (4) (2002), 323-336.
21. Zigmund A. Trigonometric Series, Cambridge University Press., (1959), Vol. 1., 615.